

Ćwiczenie 7

WYZNACZANIE WSPÓŁCZYNNIKA FILTRACJI CIECZY PRZY ZMIENNYM CIŚNIENIU HYDROSTATYCZNYM

7.1. Podstawy teoretyczne

Podane poprzednio wzory pozwalają na wyznaczenie współczynnika filtracji przy stałym ciśnieniu hydrostatycznym, czyli przy stałej wysokości słupa wody nad badanym złożem. Obecnie analizowany będzie swobodny przepływ laminarny cieczy przez złożę przy pominięciu zjawiska zawirowań cieczy (ruchu turbulentnego) i sedymentacji. Przepływ cieczy przez kolumnę filtracyjną pokazany jest na rysunku 7.1.

Wyjściowym punktem rozważań jest tu bilans masy dla płynu o gęstości ρ przepływającego z prędkością \mathbf{v}

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (7.1)$$

z którego po scałkowaniu po objętości otrzymamy zależność

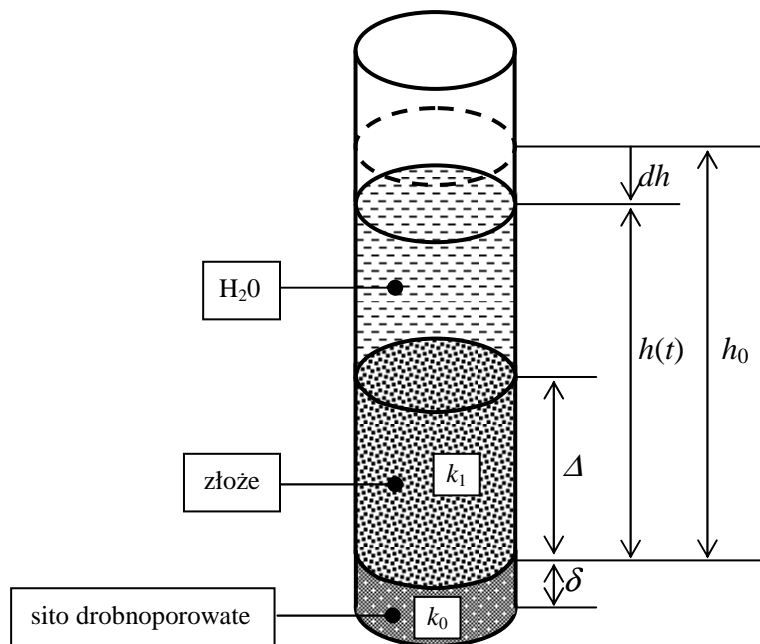
$$\frac{dm}{dt} = -\rho \mathbf{v} \mathbf{n} A \quad \Rightarrow \quad dm = -\rho \mathbf{v} \mathbf{n} A dt, \quad (7.2)$$

gdzie: $dm = \rho A dh$ - masa cieczy przefiltrowanej przez złożę w czasie dt , [kg],

A - pole przekroju poprzecznego złoża, [m^2],

\mathbf{n} - wektor normalny do powierzchni A , [-],

dh - zmiana wysokości słupa cieczy, [m].



Rys. 7.1. Przepływ cieczy przez kolumnę filtracyjną.

Do równania (7.2) dołączyć należy prawo Darcy'ego opisujące gęstość strumienia cieczy j przepływającej przez złożę

$$j = \rho \mathbf{v} \mathbf{n} = -k \nabla p, \quad (7.3)$$

gdzie: j - gęstość strumienia cieczy, [$\text{kg}/(\text{m}^2 \text{s})$],

k - współczynnik filtracji, [$\text{kg}/(\text{m s Pa}) = \text{s}$],

$p = \rho h(t) g$ - ciśnienie hydrostatyczne cieczy, [Pa],

$h(t)$ - wysokość słupa cieczy, [m],

g - przyspieszenie ziemskie, [m/s^2],

∇ - operator gradientu, [$1/\text{m}$].

7.2. Wyznaczanie współczynnika filtracji porowatego speiku

7.2.1. Wprowadzenie

Chcąc wyznaczać współczynniki filtracji porowatych materiałów ziarnistych przy wykorzystaniu kolumny filtracyjnej pokazanej na rysunku 7.1, w pierwszej kolejności wyznaczyć należy współczynnik filtracji cieczy przez porowaty speik k_0 stanowiący dno kolumny.

W analizowanym przypadku prawo Darcy'ego przyjmie postać

$$j_0 = \rho \mathbf{v}_0 \mathbf{n} = k_0 \frac{\rho g (h(t) + \delta)}{\delta}, \quad (7.4)$$

gdzie δ jest grubością speiku.

Podstawiając relację (7.4) do równania (7.2) otrzyma się zależność

$$\rho A dh = -k_0 \frac{\rho g (h(t) + \delta)}{\delta} A dt \quad \Rightarrow \quad \frac{dh}{(h(t) + \delta)} = -k_0 g \frac{dt}{\delta}, \quad (7.5)$$

którą należy scałkować w poniższy sposób

$$\int_{h_0}^h \frac{dh}{(h(t) + \delta)} = -k_0 \frac{g}{\delta} \int_{t_0}^t dt, \quad (7.6)$$

gdzie h_0 jest początkową (w chwili t_0), a h aktualną (w chwili t) wysokością słupa cieczy.

Ostatecznie po przekształceniach uzyska się następującą zależność na współczynnik filtracji k_0 speiku

$$k_0 = \frac{\delta}{g \Delta t} \ln \left(\frac{h_0 + \delta}{h(t) + \delta} \right), \quad \Delta t = t - t_0. \quad (7.7)$$

7.2.2. Przebieg badania

W celu eksperymentalnego wyznaczenia współczynnika filtracji k_0 postępuje się w następujący sposób:

- kolumnę filtracyjną ustawia się nad naczyniem do którego będzie odprowadzana przesączająca się woda,
- do kolumny wlewa się niewielkim strumieniem wodę do poziomu h_0 (podczas wlewania wody dolna powierzchnia speiku powinna być zabezpieczona przed przesączaniem wody np. przez plastikowe wieczko),
- umożliwia się wypływ wody z kolumny rejestrując w czasie zmianę poziomu $h(t)$ wody w kolumnie aż do chwili gdy lustro wody pokryje się z górną powierzchnią speiku.

Eksperyment wykonuje się w temperaturze pokojowej 20°C pamiętając o tym, że przy spadku temperatury od 30°C do 10°C jej lepkość wzrasta o ponad 50%.

7.2.3. Opracowanie wyników i oszacowanie błędu pomiaru

Na podstawie przeprowadzonych pomiarów oblicza się współczynnik filtracji speiku w danej chwili czasu t ze wzoru (8.7). Natomiast błąd pomiaru można oszacować ze wzoru

$$k_0 = \frac{1}{g} \left[\delta \ln \left(\frac{h_0 + \delta}{h(t) + \delta} \right) \frac{\delta \Delta t}{(\Delta t)^2} + \delta \frac{h(t) + \delta}{h_0 + \delta} \frac{\delta h(t)}{\Delta t} + \delta \frac{h(t) + \delta}{(h_0 + \delta)^2} \frac{\delta h_0}{\Delta t} + \left(\ln \left(\frac{h_0 + \delta}{h(t) + \delta} \right) + \delta \frac{h_0 - h(t)}{(h_0 + \delta)^2} \right) \frac{\delta \delta}{\Delta t} \right], \quad (7.8)$$

gdzie: $\delta \Delta t$ - błąd pomiaru przyrostu czasu równy podwojonemu błędowi odczytu czasu, [s],

$\delta h(t)$ - błąd pomiaru zmiany wysokości słupa wody, [m],

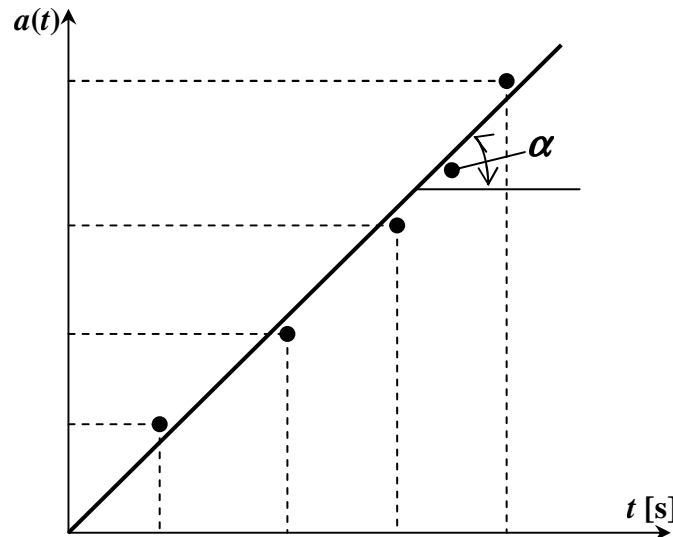
δh_0 - błąd pomiaru wysokości słupa wody w chwili początkowej t_0 , [m],

$\delta \delta$ - błąd pomiaru grubości speiku, [m].

Na podstawie przeprowadzonych pomiarów można także sporządzić wykres zależności

$$a(t) = \ln \left(\frac{h_0 + \delta}{h(t) + \delta} \right), \quad (7.9)$$

od czasu. Przykładowy wykres pokazany jest na rysunku 7.2.



Rys. 7.2. Wykres zależności $a(t)$ w funkcji czasu t .

Mając wykres zależności $a(t)$ możemy obliczyć k_0 korzystając ze wzoru

$$k_0 = \frac{\delta}{g} \operatorname{tg} \alpha. \quad (7.10)$$

7.2.4. Zakres opracowania

Opracowanie powinno zawierać:

- opis eksperymentu wraz z podaniem warunków pomiaru (temperatury i wilgotności powietrza otoczenia, temperatury wody),
- omówienie wzoru opisującego współczynnik filtracji k_0 ,
- tabelę pomiarów zawierającą pary (t, h) czyli czas i wysokość słupa wody,
- wykresy zależności wysokości słupa wody h i wielkości a od czasu,
- obliczenia współczynnika filtracji k_0 wraz z analizą błędów pomiaru,
- omówienie wyników i ostateczne oszacowanie współczynnika k_0 .

7.3. Wyznaczanie uśrednionego współczynnika filtracji układu spiek – złożo filtracyjne

7.3.1. Wprowadzenie

Określanie współczynnika filtracji spieku k_0 , stanowiącego charakterystykę kolumny filtracyjnej, jest wyjściowym punktem eksperymentu. W dalszej kolejności nad spiekem umieszcza się nasycone wodą złożo filtracyjne (np. piasek, żwir lub pospółkę) o grubości Δ i wyznacza uśredniony współczynnik filtracji k_2 układu spiek – złożo filtracyjne.

Podobnie jak poprzednio wyjściowym punktem rozważań jest bilans masy w postaci (7.2) dla płynu o gęstości ρ przepływającego z prędkością \mathbf{v}_2 przez kolumnę filtracyjną ze złożem oraz prawo Darcy'ego opisujące gęstość strumienia cieczy j_2 przepływającego przez układ spiek – złożo dane wyrażeniem

$$j_2 = \rho \mathbf{v}_2 \mathbf{n} = k_2 \frac{\rho g (h(t) + \delta)}{\delta + \Delta}, \quad (7.11)$$

gdzie k_2 jest uśrednionym współczynnikiem filtracji układu spiek – złożo filtracyjne.

Podstawiając relację (7.11) do równania (7.2) otrzyma się zależność

$$\rho A dh = -k_2 \frac{\rho g (h(t) + \delta)}{\delta + \Delta} A dt \quad \Rightarrow \quad \frac{dh}{(h(t) + \delta)} = -k_2 g \frac{dt}{\delta + \Delta}, \quad (7.12)$$

z której po scałkowaniu w granicach od $h_0 + \delta$ do $h(t) + \delta$ uzyska się relację

$$\ln\left(\frac{h(t) + \delta}{h_0 + \delta}\right) = -k_2 \frac{g}{\delta + \Delta} (t - t_0), \quad (7.13)$$

skąd ostatecznie

$$k_2 = \frac{\delta + \Delta}{g \Delta t} \ln\left(\frac{h_0 + \delta}{h(t) + \delta}\right), \quad \Delta t = t - t_0. \quad (7.14)$$

7.3.2. Przebieg badania

W celu eksperymentalnego wyznaczenia uśrednionego współczynnika filtracji k_2 postępuje się w następujący sposób:

- złożę filtracyjne należy nasycić wodą pozostawiając je przez pewien czas w zamkniętym naczyniu wypełnionym wodą
- kolumnę filtracyjną ustawia się nad naczyniem do którego będzie odprowadzana przesączająca się woda,
- wypełnia się kolumnę nasyconym złożem filtracyjnym o grubości Δ ,
- do kolumny wlewa się niewielkim strumieniem wodę do poziomu h_0 (podczas wlewania wody jak i podczas wypełniania kolumny złożem dolna powierzchnia spieku powinna być zabezpieczona przed przesączaniem się wody np. przez plastikowe wieczko),
- umożliwia się wypływ wody z kolumny rejestrując w czasie zmianę poziomu wody $h(t)$ w kolumnie aż do chwili gdy lustro wody pokryje się z górną powierzchnią złoża.

7.3.3. Opracowanie wyników i oszacowanie błędu pomiaru

Na podstawie przeprowadzonych pomiarów oblicza się uśredniony współczynnik filtracji k_2 w danej chwili czasu t ze wzoru (7.14). Błąd pomiaru można wyznaczyć ze wzoru

$$k_2 = \frac{1}{g} \left[(\delta + \Delta) \ln\left(\frac{h_0 + \delta}{h(t) + \delta}\right) \frac{\delta \Delta t}{(\Delta t)^2} + (\delta + \Delta) \frac{h(t) + \delta}{h_0 + \delta} \frac{\delta h(t)}{\Delta t} + (\delta + \Delta) \frac{h(t) + \delta}{(h_0 + \delta)^2} \frac{\delta h_0}{\Delta t} + \left(\ln\left(\frac{h_0 + \delta}{h(t) + \delta}\right) + (\delta + \Delta) \frac{h_0 - h(t)}{(h_0 + \delta)^2} \right) \frac{\delta \delta}{\Delta t} + \ln\left(\frac{h_0 + \delta}{h(t) + \delta}\right) \frac{\delta \Delta}{\Delta t} \right], \quad (7.15)$$

gdzie $\delta \Delta$ jest błędem pomiaru grubości złoża.

Tak jak przy wyznaczaniu współczynnika filtracji spieku na podstawie przeprowadzonych pomiarów można sporządzić wykres zależności

$$a(t) = \ln\left(\frac{h_0 + \delta}{h(t) + \delta}\right), \quad (7.16)$$

od czasu, a następnie obliczyć współczynnik k_2 korzystając ze wzoru

$$k_2 = \frac{\delta + \Delta}{g} \operatorname{tg} \alpha. \quad (7.17)$$

Należy tu zauważyć, że zarówno w wyrażeniu (7.7) na współczynnik filtracji spieku k_0 jak i w wzorze (7.14) na uśredniony współczynnik filtracji przez złożę i spiek k_2 występuje wspólny czynnik

$$\frac{1}{g} \ln\left(\frac{h(t) + \delta}{h_0 + \delta}\right), \quad (7.18)$$

stąd

$$k_0 \frac{\Delta t_0}{\delta} = k_2 \frac{\Delta t_2}{\delta + \Delta}, \quad (7.19)$$

gdzie Δt_0 i Δt_2 są czasami po których ciecz w kolumnie filtracyjnej osiąga określony poziom h odpowiednio przy wypełnieniu kolumny samą wodą oraz złożem filtracyjnym i wodą. Przy wykorzystaniu relacji (7.19) można policzyć uśredniony współczynnik filtracji układu spiek – złożę filtracyjne k_2 na podstawie znajomości współczynnika filtracji spieku k_0

$$k_2 = k_0 \frac{\Delta t_0}{\Delta t_2} \frac{\delta + \Delta}{\delta}, \quad (7.20)$$

przy czym w przypadku obu eksperymentów początkowy poziom wody w kolumnie musi mieć tę samą wartość h_0 .

7.3.4. Zakres opracowania

Opracowanie powinno zawierać:

- opis eksperymentu wraz z podaniem warunków pomiaru (temperatury i wilgotności powietrza otoczenia, temperatury wody) oraz parametrów badanego złoża (średnicy ziaren i jego zanieczyszczenia),
- omówienie wzoru opisującego współczynnik filtracji k_2 ,
- tabelę pomiarów zawierającą pary (t, h) czyli czas i wysokość słupa wody,
- wykresy zależności wysokości słupa wody h i wielkości a od czasu,
- obliczenia współczynnika filtracji k_2 wraz z analizą błędów pomiaru,
- omówienie wyników i ostateczne oszacowanie współczynnika k_2 .

7.4. Obliczenie współczynnika filtracji złoża filtracyjnego i oszacowanie błędu pomiaru

W dotychczasowych rozważaniach wyprowadzono wzory umożliwiające wyznaczenie współczynnika filtracji przez porowaty spiek k_0 stanowiący dno kolumny filtracyjnej oraz współczynnika filtracji k_2 w układzie złoża filtracyjne – spiek. W dalszej kolejności wyprowadzona zostanie zależność pozwalająca określić współczynnik filtracji k_1 złoża. W tym celu wykorzystana się warunek równości strumieni wypływającego ze złoża j_1 i wpływającego do spieku j_2

$$j_1 = \rho \mathbf{v}_1 \mathbf{n} = k_1 \frac{\rho g h(t)}{\Delta}, \quad j_2 = \rho \mathbf{v}_2 \mathbf{n} = k_2 \frac{\rho g (h(t) + \delta)}{\delta + \Delta}, \quad (7.21)$$

$$j_1 = j_2 \quad \Rightarrow \quad k_1 = k_2 \frac{\Delta}{\delta + \Delta} \frac{(h(t) + \delta)}{h(t)}, \quad (7.22)$$

gdzie $h(t)$ jest wysokością słupa wody wyznaczoną przy pomiarze współczynnika filtracji układu złoża filtracyjne – spiek.

Błąd pomiaru można w analizowanym przypadku wyznaczyć ze wzoru

$$\begin{aligned} \delta k_1 = & \frac{\Delta}{\delta + \Delta} \frac{(h(t) + \delta)}{h(t)} \delta k_2 + k_2 \frac{h(t) + \delta}{h(t)} \frac{\delta}{(\delta + \Delta)^2} \delta \Delta + \\ & + k_2 \frac{\Delta}{h(t)} \frac{h(t) - \Delta}{(\delta + \Delta)^2} \delta \delta + k_2 \frac{\Delta}{\delta + \Delta} \frac{\delta}{h^2(t)} \delta h. \end{aligned} \quad (7.23)$$