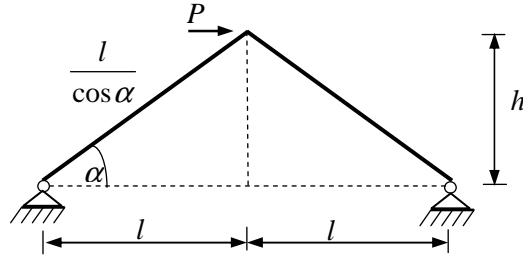


ZADANIE 3.7.

Wyznaczyć siły przekrojowe w układzie prętowym jak na rys. 3.7a w zakresie nieliniowo-sprężystym i lepkosprężystym.



Rys. 3.7a

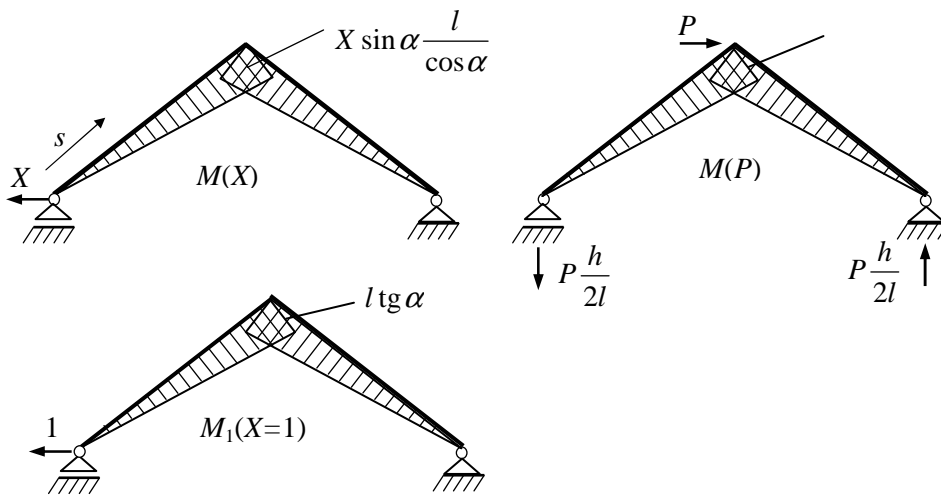
Dane: $h, l, P, J(N+1)$

$$\sigma = E\varepsilon \rightarrow \kappa = \frac{M}{EJ}$$

$$\sigma = \varepsilon^N * dA \rightarrow \kappa = \left(\frac{M * da}{J(N+1)} \right)^n$$

Rozwiązanie:

Zadanie jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalne. Wykresy sił przekrojowych przedstawiają rysunki



Rys. 3.7b

Warunek $\delta = 0$ w **zadaniu liniowym** prowadzi do relacji

$$\delta = 0 \rightarrow 2 \int_0^{\frac{l}{\cos \alpha}} (X \sin \alpha - V \cos \alpha) s \cdot 1 \sin \alpha ds = 0 \rightarrow$$

$$\frac{1}{3} (X \sin \alpha - V \cos \alpha) \left(\frac{l}{\cos \alpha} \right)^3 = 0 \rightarrow X = V \operatorname{ctg} \alpha \rightarrow X = P \frac{h}{2l} \operatorname{ctg} \alpha$$

W **zadaniu nieliniowym lepkosprężystym** zachodzi

$$\delta = 0 \rightarrow 2 \int_0^{\frac{l}{\cos \alpha}} \left[\left(\frac{X \sin \alpha - P \frac{h}{2l} \cos \alpha}{J(N+1)^n} \right) s * da \right]^n 1 \sin \alpha s ds = 0$$

stąd dla $P = P_0 f(t)$ i $X = X_0 f(t)$ zachodzi

$$\frac{1}{\cos \alpha} \int_0^{\frac{l}{\cos \alpha}} s^{n+1} ds \left(X \sin \alpha - P \frac{h}{2l} \cos \alpha \right)^n = 0$$

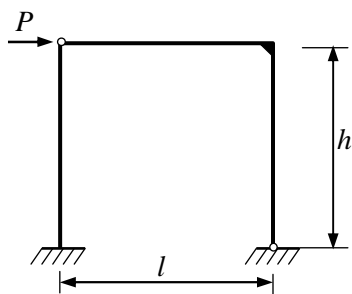
$$(\sin \alpha)^n \left(X - P \frac{h}{2l} \operatorname{ctg} \alpha \right)^n \frac{1}{n+2} \left(\frac{l}{\cos \alpha} \right)^{n+2} = 0$$

$$\left(X - \frac{P}{2l} \operatorname{ctg} \alpha \right)^n = 0 \rightarrow X = P \frac{h}{2l} \operatorname{ctg} \alpha$$

Jest to przykład zadania gdzie liniowe rozwiązania się pokrywają z nieliniowymi i to zarówno w zakresie sprężystym jak i lepkosprężystym.

ZADANIE 3.8.

W podanym układzie statycznie niewyznaczalnym należy określić siły przekrojowe w zadaniu liniowym oraz nieliniowym sprężystym.

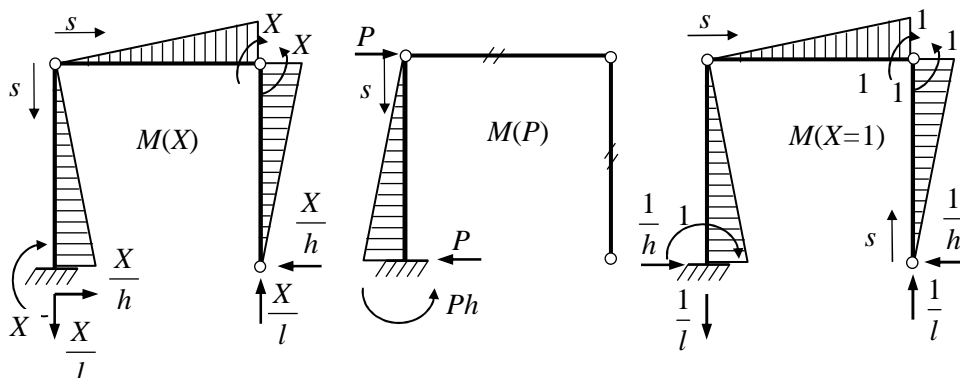


Rys. 3.8a

Dane: $P, l, h, \sigma = E\varepsilon, \sigma = A\varepsilon^N, \kappa = \frac{M}{EJ}, \kappa = \left(\frac{M}{AJ(N+1)} \right)^n$

Rozwiązanie:

Przyjęty układ podstawowy wraz z wykresami momentów zginających $M(P), M(X), M_1(X_1=1)$ przedstawiono na rysunku



Rys. 3.8b

Rozwiązanie zadania liniowo-sprężystego prowadzi do zależności $\varphi = 0$

$$\delta_{11}X + \delta_{1P}P = 0 \quad EJ\delta_{11} = 2 \cdot \frac{1 \cdot h}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1 \cdot l}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}h + \frac{1}{3}l, \quad EJ\delta_{1P} = \frac{-h^2}{2} \cdot \frac{2}{3}$$

stąd

$$X = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}}P = \frac{h^2}{3} \left(\frac{2}{3}h + \frac{1}{3}l \right)^{-1} P$$

W zadaniu nieliniowym warunek $\varphi = 0$ prowadzi do relacji

$$\varphi = \int_s \kappa M_1 ds = 0$$

$$\varphi = 0 \rightarrow \int_0^h \left(\frac{X}{h} - P \right)^n s^n \frac{s}{h} ds + \int_0^l \left(\frac{Xs}{l} \right)^n \frac{s}{l} ds + \int_0^l \left(\frac{X}{h} s \right)^n \frac{1s}{h} ds = 0$$

$$\left(\frac{X}{h} - P \right)^n \frac{h^{n+2}}{h} + \left(\frac{X}{l} \right)^n \frac{l^{n+2}}{l} + \left(\frac{X}{h} \right)^n \frac{l^{n+2}}{h} = 0$$

Otrzymamy stąd równanie algebraiczne postaci

$$\left(\frac{X}{h} - P \right)^n + \left(\frac{X}{l} \right)^n \alpha^{n+1} + \left(\frac{X}{h} \right)^n \alpha^{n+2} = 0 \rightarrow \left(\frac{X}{h} - P \right)^n + \left(\frac{X}{h} \right)^n (\alpha + \alpha^{n+2}) = 0$$

gdzie $\alpha = \frac{l}{h}$

Z uwagi na fakt, iż n jest liczbą nieparzystą to $\left(\frac{X}{h} - P \right)^n = - \left(P - \frac{X}{h} \right)^n$ i

otrzymamy

$$\left(\frac{\beta X}{h} \right)^n - \left(P - \frac{X}{h} \right)^n = 0, \quad \text{gdzie } \beta^n = \alpha(1 + \alpha^{n+1})$$

W przypadku szczególnym $n = 3$ otrzymamy rozwiązanie postaci

$$\begin{aligned} \left(\frac{\beta X}{h} \right)^3 - \left(P - \frac{X}{h} \right)^3 &= \left[\frac{\beta X}{h} - P + \frac{X}{h} \right] \left[\left(\frac{\beta X}{h} \right)^2 + \frac{\beta X}{h} \left(P - \frac{X}{h} \right) + \left(P - \frac{X}{h} \right)^2 \right] = \\ &= \left[\frac{\beta X}{h} - \left(P - \frac{X}{h} \right) \right] \left\{ \frac{\beta X}{h} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{X}{h} - P \right) + \left(P - \frac{X}{h} \right) i \sqrt{3} \right] \right\} \cdot \\ &\cdot \left\{ \frac{\beta X}{h} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{X}{h} - P \right) - \left(P - \frac{X}{h} \right) i \sqrt{3} \right] \right\} \end{aligned}$$

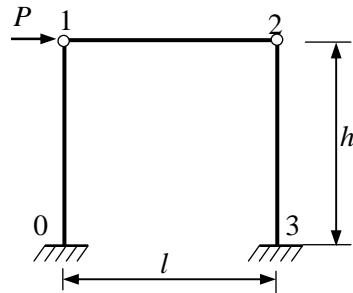
Rzeczywisty pierwiastek tego równania prowadzi do zależności

$$\frac{\beta X}{h} - \left(P - \frac{X}{h} \right) = 0 \rightarrow \frac{X}{h} (1 + \beta) = P \rightarrow X = (1 + \beta)^{-1} Ph$$

W zadaniu nieliniowym lepkosprężystym, kiedy $\sigma = \varepsilon^N * dA$,
 $\kappa = \left(\frac{M * da}{J(N+1)} \right)^n$ wobec wykazanej poprzednio zależności rozwiązań w
 przypadku obciążeń mechanicznych od funkcji relaksacji A wynik będzie
 identyczny jak w nieliniowo-sprężystym.

ZADANIE 3.9.

Należy określić siły przekrojowe występujące w układzie prętowym
 przedstawionym na rys. 3.9a obciążonym siłą poziomą P .

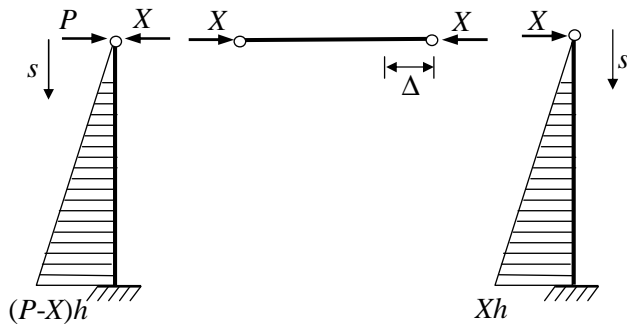


Rys. 3.9a

Dane: $P, l, h, \sigma = A\varepsilon^N, \kappa = \left(\frac{M}{AJ(N+1)} \right)^n, \varepsilon = \left(\frac{N}{AF} \right)^n$

Rozwiązanie:

Zadanie jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalne, a jako siłę nadliczbową
 przyjmujemy siłę osiową X w ryglu. Układ rozbijemy na 2 podukłady: rygiel 1-2
 oraz słupy 0-1 i 2-3. Każdy z elementów jest nieliniowo-sprężysty.

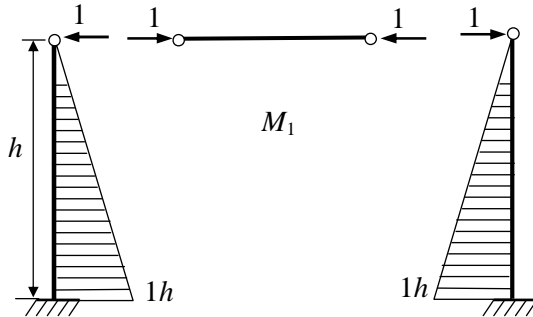


Rys. 3.9b

Warunek nierozdzielności układu ma postać

$$\delta_1 - \delta_2 = \Delta$$

gdzie δ_1 , δ_2 i Δ są kolejno ugięciem słupów 0-1 i 3-2 oraz skróceniem ryglu 1-2.



Rys. 3.9c

W zadaniu liniowo-sprężystym $\sigma = E\varepsilon$ zachodzi

$$EJ\delta_1 = \frac{Ph^2}{2} \cdot \frac{2}{3}h - \frac{Xh^2}{2} \cdot \frac{2}{3}h = \frac{(P-X)h^3}{3}$$

$$EJ\delta_2 = \frac{Xh^2}{2} \cdot \frac{2}{3}h = \frac{Xh^3}{3}$$

$$EF\Delta = Xl$$

stąd

$$\frac{(P-X)h^3}{3EJ} - \frac{Xh^3}{3EJ} = \frac{Xl}{EF} \rightarrow P - 2X = Xb, \quad b = \frac{3l}{h^3} \frac{J}{F}$$

Siła osiowa w ryglu wynosi

$$X = \frac{P}{2+b}$$

W przypadku nieliniowo – sprężystym przemieszczenia wynoszą

$$\delta_1 = \int_0^h \left[\frac{(P-X) \cdot s}{AJ(N+1)} \right]^n s ds = \left[\frac{P-X}{AJ(N+1)} \right]^n \frac{h^{n+2}}{n+2}$$

$$\delta_2 = \int_0^h \left[\frac{Xs}{AJ(N+1)} \right]^n s ds = \left(\frac{X}{AJ(N+1)} \right)^n \frac{h^{n+2}}{n+2}$$

$$A = \left(\frac{X}{AF} \right)^n l$$

Podstawiając do warunków nierozdzielności otrzymamy

$$\left(\left[\frac{P-X}{AJ} \right]^n - \left[\frac{X}{AJ} \right]^n \right) \frac{h^{n+2}}{n+2} = \left(\frac{X}{AF} \right)^n l \rightarrow (P-X)^n - X^n = X^n \frac{l(n+2)J^n}{h^{n+2}F^n}$$

a następnie

$$(P-X)^n = X^n a^n \rightarrow \left(\frac{P-X}{a} \right)^n = X^n \rightarrow \frac{P-X}{a} = X \rightarrow X_1 = \frac{P}{1+a}$$

Wyznaczenie siły nadliczbowej wymaga rozwiązania równania algebraicznego typu $(A-X)^n - (X)^n = 0$. Podamy teraz rozwiązanie kiedy $n = 3$.

Zachodzi

$$\left(\frac{P-X}{a} \right)^3 - X^3 = 0 \rightarrow \left(\frac{P-X}{a} - X \right) (X - X_1)(X - X_2) = 0$$

gdzie

$$2X_{1,2} = \frac{P-X}{a} (1 \pm \sqrt{3})$$

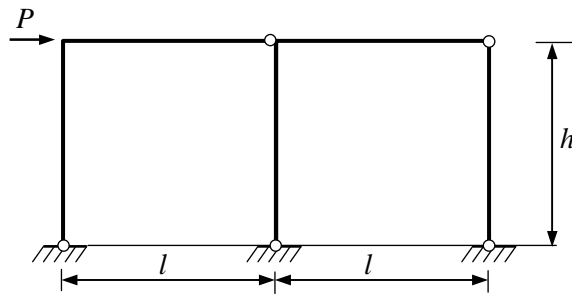
$$\text{Otrzymamy stąd trzy pierwiastki } X_1 = \frac{P}{1+a}, \quad X_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2a+1 \pm \sqrt{3}} P$$

Zauważmy, iż pierwiastek $X_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{2a+1-\sqrt{3}} P$ prowadzi do siły X o zwrocie przeciwnym od założonego, a więc sprzecznego z fizycznym sensem zadania.

Występująca w tym zadaniu wielkość $a^n = \frac{(n+2)l}{h^2} \left(\frac{J}{hF} \right)^n + 1$ ujmuje wpływ nieliniowych parametrów występujących w równaniach fizycznych.

ZADANIE 3.10.

Należy wyznaczyć siły przekrojowe w układzie ramowym wykonanym z materiału liniowo i nieliniowo-sprężystego.



Rys. 3.10a

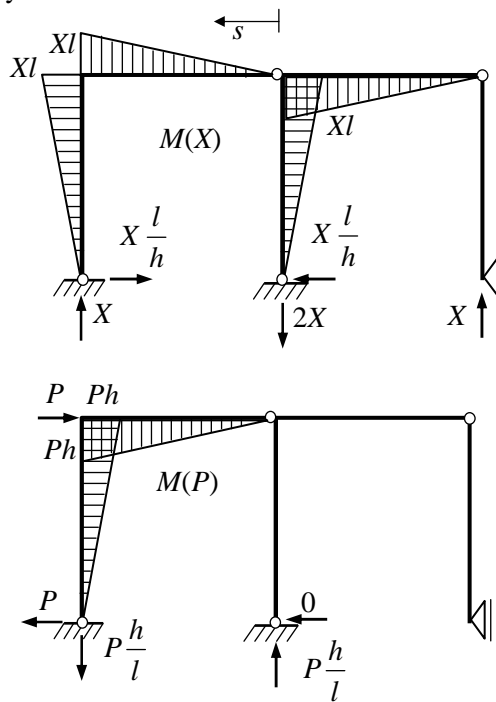
Dane: $h, l, P, J(N+1)$

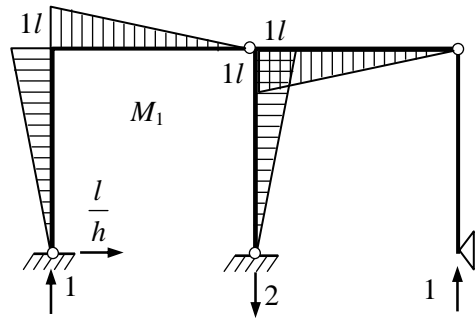
$$\sigma = E\varepsilon \rightarrow \kappa = \frac{M}{EJ}$$

$$\sigma = A\varepsilon^N \rightarrow \kappa = \left(\frac{M}{AJ(N+1)} \right)^n$$

Rozwiązanie:

Zadanie jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalne. W **zadaniu liniowo-sprężystym** układ podstawowy wraz z wykresami sił przekrojowych przedstawiają rysunki





Rys. 3.10b

$$\delta_{11}X + \delta_{1P}P = 0 \rightarrow X = \frac{-\delta_{1P}P}{\delta_{11}}$$

gdzie

$$EJ\delta_{11} = 2\frac{lh}{2} \cdot \frac{2}{3}l + 2\frac{l^2}{2} \cdot \frac{2}{3}l = \frac{2}{3}hl^2 + \frac{2}{3}l^3, \quad EJ\delta_{1P} = -\frac{lh}{2} \cdot \frac{2}{3}h - \frac{l^2}{2} \cdot \frac{2}{3}h$$

stąd

$$X = \frac{1}{3}(lh^2 + l^2h) \left[(hl^2 + l^3) \frac{2}{3} \right]^{-1}$$

W zadaniu nieliniowym warunek $\delta = 0$ prowadzi do całek

$$\begin{aligned} \delta = 0 \rightarrow & \int_0^h \left(\frac{\left(X \frac{l}{h} - P \right) s}{AJ(N+1)} \right)^n \frac{ls}{h} ds + \int_0^l \left(\frac{\left(X - P \frac{h}{l} \right)}{AJ(N+1)} \right)^n s ds + \\ & + \int_0^h \left(\frac{\left(X \frac{l}{h} \right) s}{AJ(N+1)} \right)^n \frac{l}{h} s ds + \int_0^l \left(\frac{Xs}{AJ(N+1)} \right)^n s ds = 0 \end{aligned}$$

stąd

$$\left(X \frac{l}{h} - P \right)^n \frac{l}{h} \frac{h^{n+2}}{n+2} + \left(X - P \frac{h}{l} \right)^n \frac{l^{n+2}}{n+2} + \left(X \frac{l}{h} \right)^n \frac{l}{h} \frac{h^{n+2}}{n+2} + X^n \frac{l^{n+2}}{n+2} = 0$$

$$\left(\frac{X}{\alpha} - P\right)^n \frac{1}{\alpha} + (X - P\alpha)^n \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n+2} + \left(\frac{X}{\alpha}\right)^n \cdot \frac{1}{\alpha} + X^n \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n+2} = 0, \quad \alpha = \frac{h}{l}$$

$$(X - P\alpha)^n \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n+1} + (X - P\alpha)^n \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n+2} + X^n \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n+1} + X^n \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n+2} = 0$$

$$(X - P\alpha)^n \left(\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n+2} \right) + X^n \left(\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n+2} \right) = 0$$

$$\left[(X - P\alpha)^n + X^n \right] \alpha^n = 0 \rightarrow (X - P\alpha)^n + X^n = 0$$

W przypadku $n = 3$ zachodzi

$$(X - P\alpha)^3 + X^3 = 0 \rightarrow X^3 - (\alpha P - X)^3 = 0$$

stąd

$$\left[X - (\alpha P - X) \right] \left[X^2 + X(\alpha P - X) + (\alpha P - X)^2 \right] = 0$$

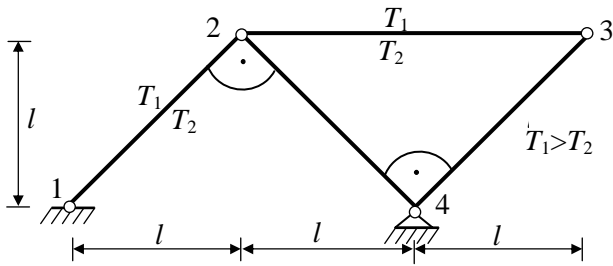
Równanie to posiada następujący rzeczywisty pierwiastek

$$X - (\alpha P - X) = 0 \rightarrow X_1 = \frac{\alpha P}{2}$$

Natomiast rozwiązanie równania $X^2 + X(\alpha P - X) + (\alpha P - X)^2 = 0$ wobec ujemnego wyróżnika $\Delta = -3(P\alpha)^2 < 0$ prowadzi do zespolonych wartości sił hiperstatycznych nie posiadających interpretacji fizycznej.

ZADANIE 3.11.

W podanym układzie prętowym (jednokrotnie statycznie niewyznaczalnym) należy wyznaczyć rozkłady funkcji momentów zginających, sił poprzecznych i sił osiowych wywołanych działaniem stacjonarnego pola temperatur. Schemat zadania oraz pole temperatur przedstawiono na rys. 3.11a.



Rys. 3.11a

Obliczenia należy wykonać dla materiału

- a) liniowo-sprężystego $\sigma = E \cdot \varepsilon$
- b) nieliniowo-sprężystego $\sigma = A \cdot \varepsilon^N$
- c) liniowo-lepkosprężystego $\sigma = R * d\varepsilon$

Wyniki obliczeń należy ze sobą porównać.

Dane: l -długość, T_1 -temperatura wyższa, T_2 -temperatura niższa, α_T -współczynnik rozszerzalności cieplnej, E , n , $R(t)$, A -współczynnik i funkcje charakteryzujące właściwości mechaniczne w podanym układzie różnych materiałów.

Rozwiązanie:

W zadaniu siłę hiperstatyczną i siły przekrojowe wyznaczamy korzystając z całki Mohra

$$\delta = \int_s (\kappa_M + \kappa_T) M_1 ds + \int_s (\varepsilon_M + \varepsilon_T) N_1 ds$$

gdzie δ jest przemieszczeniem w układzie wywołanym przyrostem temperatury.

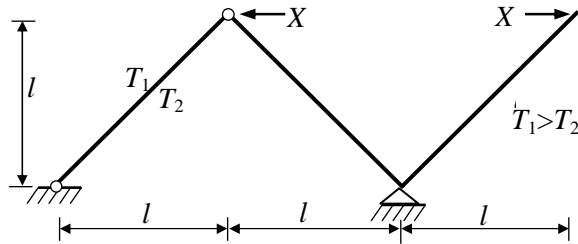
Zgodnie z warunkiem nierozdzielności wzajemne przemieszczenie punktów 2 i 3 jest równe wydłużeniu pręta 2-3 co zapiszemy w następujący sposób

$$\int_s (\kappa_M + \kappa_T) M_1 ds + \int_s (\varepsilon_M + \varepsilon_T) N_1 ds = \alpha_T \left(\frac{T_1 + T_2}{2} \right) 2l - \frac{X 2l}{EF}$$

gdzie: (κ_M, κ_T) są zmianami krzywizn wywołanymi odpowiednio przez stan naprężeń i przyrost temperatury, a $(\varepsilon_M, \varepsilon_T)$ są wydłużeniami wywołanymi przez pole naprężeń i średnią wartości temperatury w przekroju.

Występujące w całce Mohra funkcje M_1 i N_1 są momentami zginającymi i siłami osiowymi w analizowanym układzie prętowym, które wywołane są działaniem siły jednostkowej przyłożonej w miejscu i kierunku poszukiwanego przemieszczenia.

Przedstawione zadanie jest równoważne następującemu statycznie wyznaczalnemu zadaniu.



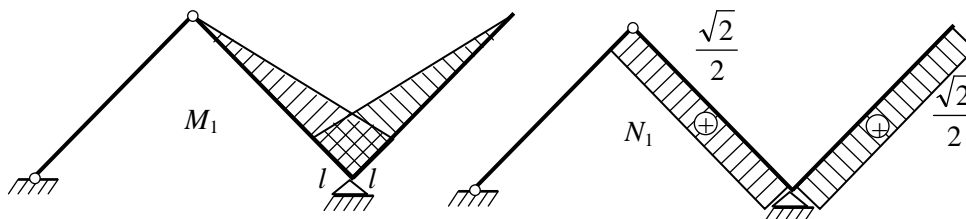
Rys. 3.11b

Należy jednak narzucić warunek nierozdzielności

$$\delta = \alpha_T \frac{(T_1 + T_2)}{2} 2l - \frac{X 2l}{EF}$$

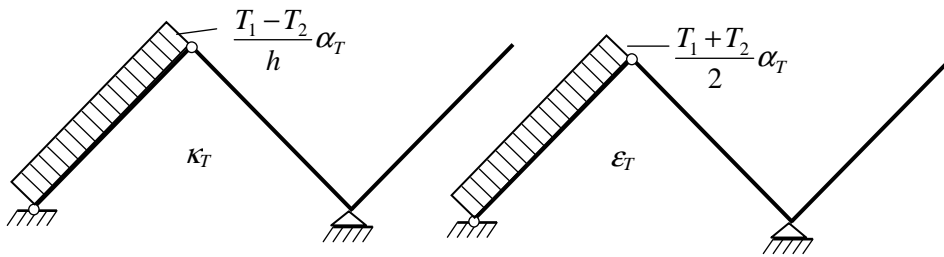
W wyrażeniu tym δ przyjmuje różne wartości w zależności od analizowanego materiału.

Wspólną częścią obliczeń dla wszystkich rozważanych przypadków (niezależnie od opisu materiału) są funkcje M_1 i N_1 których wykresy mają postać



Rys. 3.11c

Wspólną częścią obliczeń są również: wydłużenie oraz zmiany krzywizn wywołane działaniem pola termicznego



Rys. 3.11d

ad a) **Materiał liniowo-sprężysty**

Materiał liniowo-sprężysty opisany jest równaniem fizycznym $\sigma = E \cdot \varepsilon$. Równanie to prowadzi do następujących wyrażań na krzywiznę κ_M i wydłużenie ε_M

$$\kappa_M = \frac{M}{EJ}, \quad \varepsilon_M = \frac{N}{EF}$$

gdzie: M – funkcja momentów zginających wywołanych działaniem wszystkich sił w układzie, N – funkcja sił osiowych od wszystkich sił w układzie.

W wyniku podstawień otrzymujemy

$$\int_s \frac{MM_1}{EJ} ds + \int_s M_1 \cdot \kappa_T ds + \int_s \frac{NN_1}{EF} ds + \int_s \varepsilon_T N_1 ds = \alpha_T (T_1 + T_2) l - \frac{X \cdot 2l}{EF}$$

Funkcje M i N można przedstawić w następujący sposób

$$M = X \cdot M_1, \quad N = X \cdot N_1$$

więc

$$X \left(\int_s \frac{M_1 \cdot M_1}{EJ} ds + \int_s \frac{N_1 N_1}{EF} ds \right) + \int_s \kappa_T M_1 ds + \int_s \varepsilon_T N_1 ds = \alpha_T (T_1 + T_2) l - \frac{X 2l}{EF}$$

$$X (\delta_{11} + \delta'_{11}) + (\delta_T + \delta'_T) = \alpha_T (T_1 + T_2) l - \frac{X 2l}{EF}$$

gdzie

$$\delta_{11} = \int_s \frac{M_1 M_1}{EJ} ds, \quad \delta'_{11} = \int_s \frac{N_1 N_1}{EF} ds, \quad \delta_T = \int_s \kappa_T M_1 ds, \quad \delta'_T = \int_s \varepsilon_T N_1 ds$$

Wartości współczynników $\delta_{11}, \delta'_{11}, \delta_T, \delta'_T$ wyznaczamy korzystając z uproszczonego sposobu Mohra – Wereszczagina.

W wyniku przeliczeń otrzymujemy

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ} 2 \left(\frac{1}{2} l \cdot \sqrt{2} l \cdot \frac{2}{3} l \right) = \frac{2\sqrt{2}}{3EJ} l^3$$

$$\delta'_{11} = \frac{1}{EF} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} l \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}l}{EF}$$

$$\delta_T = 0, \quad \delta'_T = 0$$

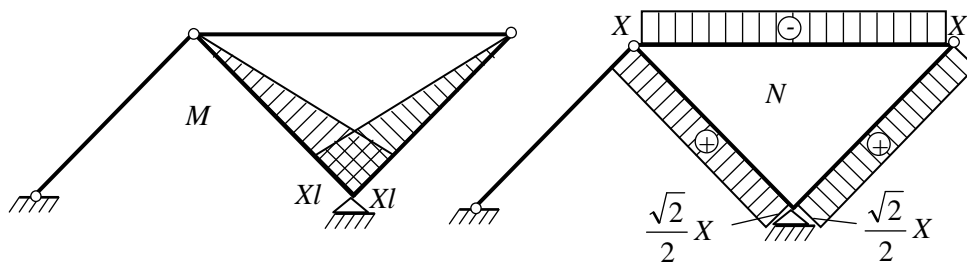
Uzyskane wyniki wstawiamy do równania

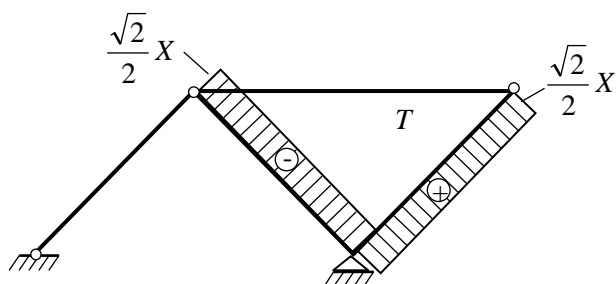
$$X \left(\frac{2\sqrt{2}l^3}{3EJ} + \frac{\sqrt{2}l}{EF} \right) = \alpha_T (T_1 + T_2) l - \frac{X 2l}{EF}$$

$$X \left(\frac{2\sqrt{2}l^3}{3EJ} + \frac{l(\sqrt{2} + 2)}{EF} \right) = \alpha_T (T_1 + T_2) l$$

$$X = [\alpha_T (T_1 + T_2) l] \cdot \left(\frac{2\sqrt{2}l^3}{3EJ} + \frac{l(\sqrt{2} + 2)}{EF} \right)^{-1}$$

Wyznaczona siła hiperstatyczna X pozwala na sporządzenie wykresów sił wewnętrznych w zadanym układzie prętowym.





Rys. 3.11e

ad b) **Materiał nieliniowo-sprężysty**

Wykresy sił osiowych N_1 i momentów M_1 od siły jednostkowej $X = 1$ oraz wykresy termicznych wydłużeń i zmian krzywizn są identyczne jak w zadaniu liniowo-sprężystym. Wydłużenie i zmiany krzywizn wywołane siłą hiperstatyczną opisują wyrażenia

$$\varepsilon = \left(\frac{N}{AF} \right)^n, \quad \kappa = \left[\frac{M}{AJ(N+1)} \right]^n$$

które wynikają z równania fizycznego postaci $\sigma = A\varepsilon^N$

W układzie zadanym, który rozpatrujemy teraz jako wykonany z materiału nieliniowo-sprężystego nadal obowiązuje warunek nierozdzielności

$$\delta = \alpha_T (T_1 + T_2) l - \frac{X^n 2l}{(AF)^n}$$

Wartość δ wyznaczamy z całki Mohra

$$\delta = \int_s \frac{M^n}{[AJ(N+1)]^n} M_1 ds + \int_s \frac{N^n}{(AF)^n} N_1 ds + \delta_T + \delta_T'$$

gdzie: $M = XM_1$, $N = XN_1$, a następnie wstawimy do

$$\int_s \frac{X^n M_1^n M_1}{[AJ(N+1)]^n} ds + \int_s \frac{X^n N_1^n N_1}{(AF)^n} ds + \delta_T + \delta_T' = \alpha_T (T_1 + T_2) l - \frac{X^n 2l}{(AF)^n}$$

$$X^n \left(\int_s \frac{M_1^n M_1}{[AJ(N+1)]^n} ds + \int_s \frac{N_1^n N_1}{(AF)^n} ds \right) = \alpha_T (T_1 + T_2) l - \frac{X^n 2l}{(AF)^n}$$

Obliczamy całki

$$\int_s \frac{M_1^n M_1}{[AJ(N+1)]^n} ds = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{2}l} \frac{s^n s}{[AJ(N+1)]^n} ds = \frac{2(\sqrt{2} \cdot l)^{n+2}}{[AJ(N+1)]^n (2+n)}$$

$$\int_s \frac{N_1^n N_1}{(AF)^n} = 2 \cdot \frac{1}{(AF)^n} \int_0^{\sqrt{2}l} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} ds = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2}l}{(AF)^n} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \cdot 2l}{(AF)^n}$$

Obliczone całki wstawiamy do

$$X^n \left(\frac{2(\sqrt{2}l)^{2+n}}{[AJ(N+1)]^n \cdot (2+n)} + \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \cdot 2l}{(AF)^n} \right) = \alpha_T (T_1 + T_2) l - \frac{X^n 2l}{(AF)^n}$$

$$X^n \left(\frac{2(\sqrt{2}l)^{2+n}}{[AJ(N+1)]^n (2+n)} + \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n 2l}{(AF)^n} + \frac{2l}{(AF)^n} \right) = \alpha_T (T_1 + T_2) l$$

$$X = [\alpha_T (T_1 + T_2) l]^N \left[\frac{2(\sqrt{2}l)^{2+n}}{[AJ(N+1)]^n (2+n)} + \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n 2l + 2l}{(AF)^n} \right]^{-N}$$

Porównując rozwiązania dla materiału nieliniowo-sprężystego i liniowo-sprężystego możemy otrzymać tzw. „moduł sieczny”.

$$\begin{aligned}
& [\alpha_T (T_1 + T_2) l]^N \left[\frac{2(\sqrt{2}l)^{2+n}}{[AJ(N+1)]^n (2+n)} + \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n 2l + 2l}{(AF)^n} \right]^{-N} = \\
& = [\alpha_T (T_1 + T_2) l] \cdot \left[\frac{2\sqrt{2}l^3}{3EJ} + \frac{l(\sqrt{2} + 2)}{EF} \right]^{-1} \\
E & = [\alpha_T (T_1 + T_2) l]^{N-1} \left[\frac{2\sqrt{2}l^3}{3J} + \frac{l(\sqrt{2} + 2)}{F} \right] \cdot \\
& \cdot \left[\frac{2(\sqrt{2}l)^{2+n}}{[AJ(N+1)]^n (2+n)} + \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n 2l + 2l}{(AF)^n} \right]^{-N}
\end{aligned}$$

Otrzymany „moduł sieczny” zależy nie tylko od rozkładu temperatur, ale również od konfiguracji układu.

ad c) **Liniowy materiał lepkosprężysty**

Równanie fizyczne ma postać

$$\sigma = \int_0^t \phi(t - \tau) \dot{\epsilon}(\tau) d\tau = \phi * \dot{\epsilon}$$

gdzie: $\phi(t)$ – funkcja relaksacji, $\dot{\epsilon}(\tau)$ - prędkość odkształceń, * - symbol splotu.

Wydłużenia i krzywizny wyrażają się wzorami

$$\begin{aligned}
\dot{\epsilon} & = \frac{N * \dot{\phi}^{-1}}{F}, \quad \dot{\kappa} = \frac{M * \dot{\phi}^{-1}}{J} \\
\epsilon & = \frac{\dot{N} * R}{F}, \quad \kappa = \frac{\dot{M} * R}{J}
\end{aligned}$$

Warunek nierozdzielności pozostaje podobny do tego jak w zadaniu liniowo i nieliniowo-sprężystym.

$$\delta = \alpha_T (T_1 + T_2) l - \frac{R^* \dot{X} 2l}{F}$$

czyli

$$\int_s \frac{R^* \dot{M}}{J} M_1 ds + \int_s \kappa_T M_1 ds + \int_s \frac{R^* \dot{N}}{F} N_1 ds + \int_s \varepsilon_T N_1 ds = \alpha_T (T_1 + T_2) l - \frac{R^* \dot{X} 2l}{F}$$

gdzie: $\dot{M} = \dot{X} \cdot M_1$, $\dot{N} = \dot{X} \cdot N_1$

$$\int_s \frac{R^* \dot{X} M_1}{J} M_1 ds + \int_s \kappa_T M_1 ds + \int_s \frac{R^* \dot{X} N_1}{F} N_1 ds + \int_s \varepsilon_T N_1 ds =$$

$$= \alpha_T (T_1 + T_2) l - \frac{R^* \dot{X} 2l}{F}$$

$$R^* \dot{X} \left(\int_s \frac{M_1 M_1}{J} ds + \int_s \frac{N_1 N_1}{F} ds \right) + \delta_T + \delta_T' = \alpha_T (T_1 + T_2) l - \frac{R^* \dot{X} 2l}{F}$$

$$R^* \dot{X} \left(2 \int_0^{\sqrt{2}l} \frac{s \cdot s}{J} ds + 2 \int_0^{\sqrt{2}l} \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot 2F} ds + \frac{2l}{F} \right) = \alpha_T (T_1 + T_2) 2l$$

$$R^* \dot{X} = [\alpha_T (T_1 + T_2) l] \left(\frac{4\sqrt{2}l^3}{3J} + \frac{\sqrt{2}l + 2l}{F} \right)^{-1}$$

Stosujemy na tym równaniu transformację Laplace'a, w wyniku której otrzymujemy

$$\bar{R}(p) p \bar{X}(p) = \frac{1}{p} [\alpha_T (T_1 + T_2) l] \left(\frac{4\sqrt{2}l^3}{3J} + \frac{\sqrt{2}l + 2l}{F} \right)^{-1}$$

Przyjmujemy w zadaniu stacjonarny układ temperatury określany równaniem $T_1(t) + T_2(t) = (\dot{T}_1 + \dot{T}_2) H(t)$, gdzie: $H(t)$ – funkcja Heaviside'a.

Wprowadzając funkcję modyfikującą $r(t)$ $r(t) = \frac{1}{\bar{R}(t)}$

otrzymamy

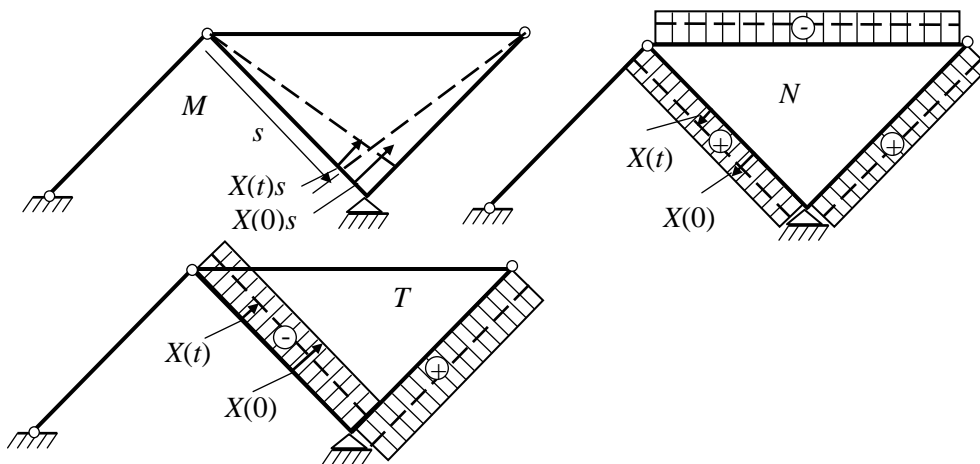
$$X(t) = \frac{t}{l} * r(t) [\alpha_T (\dot{T}_1 + \dot{T}_2) l] \left(\frac{4\sqrt{2}l^3}{3J} + \frac{\sqrt{2}l + 2l}{F} \right)^{-1}$$

Funkcja $X(t)$ dla ramy żelbetowej poddanej działaniu temperatury przyjmie postać

$$\begin{aligned}
X(t) = & \int_0^t \tau * \frac{1}{E_b} \left\langle \frac{1}{1+\mu} \left\{ E_b \left[-\gamma(1+E_b C_0) e^{-\gamma(1+E_b C_0)(t-\tau)} + \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \left(1 - \frac{1}{1+E_b C_0} \right) + \frac{1}{1+E_b C_0} \delta(t-\tau) \right] + \mu E_2 \delta(t-\tau) \right\} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{1+\mu} \left\{ E_b \left(1 - \frac{1}{1+E_b C_0} \right) \right\} \delta(t-\tau) \right\rangle d\tau [\alpha_T (\dot{T}_1 + \dot{T}_2) l] \left(\frac{2\sqrt{2}l^3}{3J} + \frac{\sqrt{2}l+2l}{F} \right)^{-1}
\end{aligned}$$

W podanym wzorze E_b , C_0 , γ są stałymi określającymi reologiczne właściwości betonu, (por.[]) μ - udział zbrojenia, E_2 - moduł sprężystości stalowych wkładek.

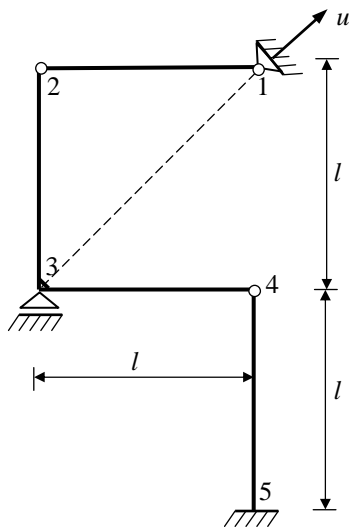
Po wykonaniu całkowania otrzymujemy zmienny w czasie rozkład sił wewnętrznych wywołanych stacjonarnym przepływem ciepła w ramie żelbetowej. Przyjęto przy tym, że beton opisany może być równaniem liniowej lepkosprężystości, natomiast stal posiada właściwości sprężyste.



Rys. 3.11f Wykresy sił wewnętrznych M , N , T dla materiału liniowo lepkosprężystego.

ZADANIE 3.12.

W podanym układzie prętowym (jednokrotnie statycznie niewyznaczalnym) należy wyznaczyć rozkłady funkcji momentów zginających, sił poprzecznych i osiowych wywołanych osiadaniami podpory 1. Schemat statyczny układu oraz kierunek osiadania podpory przedstawione są na rys. 3.12a



Rys. 3.12a

Obliczanie należy wykonać dla materiału:

- a) **liniowo sprężystego** $\sigma = E \cdot \varepsilon$
- b) **nieliniowo-sprężystego** $\sigma = A \cdot \varepsilon^N$
- c) **liniowo lepkosprężystego** $\sigma = R * d\varepsilon$

Wyniki obliczeń należy ze sobą porównać.

Dane: l – długość, E , A , N , $R(t)$ – współczynniki i funkcje charakteryzujące właściwości mechaniczne w podanym zestawie różnych materiałów.

Rozwiązanie:

W przedstawionym zadaniu siły wewnętrzne i hiperstatyczne wyznaczamy posługując się całką Mohra, która w postaci niezmienniczej przyjmuje formę zależności

$$\delta = \int_s M_1 (\kappa_M + \kappa_T) ds + \int_s N_1 (\varepsilon_M + \varepsilon_T) ds$$

gdzie δ jest przemieszczeniem w układzie wywołanym osiadaniem podpory w punkcie 1.

Korzystając z warunków nierozdzielności możemy stwierdzić, że przemieszczenie układu w punkcie 1 wynosi