

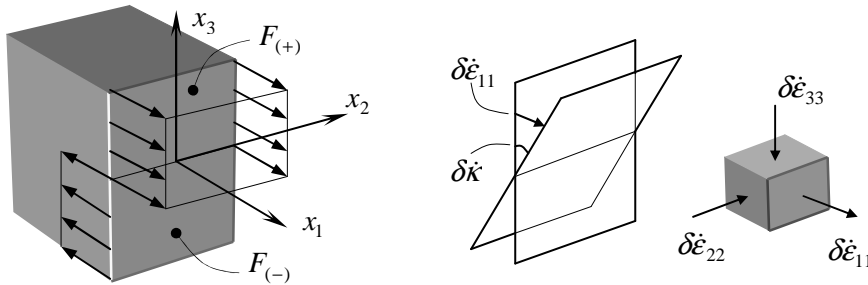
Rozdział VI

Stany graniczne konstrukcji

Punktem wyjściowym tych zagadnień są równania fizyczne teorii ciała sztywno-plastycznego lub też sztywno-plastycznego ze wzmocnieniem. W przypadku jednowymiarowym mają one postać

$$\varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{dla } \sigma < \sigma_p \\ \text{dowolne} & \text{dla } \sigma = \sigma_p \end{cases} \quad \sigma_p \text{ - granica plastyczności}$$

Przyjęty model powoduje, iż w przekroju nie powstaną żadne odkształcenia, jeżeli $\sigma < \sigma_p$, lub też powstaje dowolne odkształcenie po osiągnięciu σ_p . W konsekwencji deformacje konstrukcji zostają zlokalizowane w miejscach, gdzie wszystkie włókna przekroju uległy uplastycznieniu. Wystąpi wówczas tzw. przegub plastyczny określony następującymi zależnościami



Rys. 6.0a

$$N = 0 \rightarrow \int_{F(-)} \sigma_p dF - \int_{F(+)} \sigma_p dF = 0 \rightarrow F_{(-)} = F_{(+)}$$

$$M_p = \int_F \sigma_p x_3 dF = \sigma_p \left[\int_{F(-)} x_3 + \int_{F(+)} x_3 \right] dF = \sigma_p [s_{(-)} + s_{(+)}] = \sigma_p W_p$$

Z otrzymanych wzorów wynika, iż przekrój w którym wystąpiło uplastycznienie podzielony jest na dwie równe części. Natomiast moment uplastycznienia M_p jest równy iloczynowi granicy plastyczności σ_p i wskaźnika plastyczności W_p czyli sumy momentów statycznych pól $F_{(-)}$ i $F_{(+)}$ liczonych względem osi obojętnej.

Analizując wyrażenie na moc w przegubie plastycznym otrzymamy

$$L = \int_V \sigma_{ij} \delta \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_{SF} \sigma_{11} \delta \dot{\epsilon}_{11} dF dS = \int_{SF} \sigma_{11} x_3 \delta \dot{\kappa} dF dS = \\ = \int_{SF} \sigma_p x_3 dF \delta \dot{\kappa} dS = \int_S M_p \delta \dot{\kappa} dS$$

Z uwagi na lokalizację przegubów plastycznych w skończonej ilości przekrojów całka po długości zamieni się w sumę

$$L = \sum_{\alpha} M_p^{\alpha} \delta \dot{\kappa}^{\alpha} .$$

W rozwiązaniach problemów stanów granicznych korzystamy generalnie z podejścia kinetycznego i statycznego.

W pierwszym ujęciu podstawę stanowi zasada mocy dyssypowanych, zaś w drugim analiza warunków równowagi granicznej konstrukcji.

Określenie

Statycznie dopuszczalne pole sił jest takim ich rozkładem w konstrukcji, że

- spełnione są równania równowagi wewnętrznej,
- spełnione są statyczne warunki brzegowe,
- w żadnym punkcie konstrukcji nie zostaje przekroczona wartość graniczna (warunek plastyczności).

Określenie

Kinematycznie dopuszczalne pole przemieszczeń musi spełniać:

- geometryczne warunki brzegowe,
- spowodować występowanie różnych od zera odkształceń przynajmniej w kilku punktach konstrukcji,
- zapewnić nieujemność pracy wykonywanej przez obciążenia zewnętrzne na odpowiadających im przemieszczeniach.

Wprowadzone pojęcia o statycznie i kinematycznie dopuszczalnych polach sił i przemieszczeń pozwalają na sformułowanie podstawowych twierdzeń teorii stanów granicznych.

1. Twierdzenie o obciążeniach bezpiecznych

Konstrukcja nie ulega zniszczeniu lub jest co najwyżej w stanie równowagi granicznej, jeżeli dla danego obciążenia μ, q można znaleźć statycznie dopuszczalne pole sił wewnętrznych.

2. Twierdzenie o obciążeniach niebezpiecznych

Konstrukcja nie może przenieść danego układu obciążeń $\mu_k q$ jeżeli istnieje kinematycznie dopuszczalne pole przemieszczeń takie, że odpowiadająca mu praca obciążeń zewnętrznych jest większa od pracy sił wewnętrznych (dysypowanych z układu). Z przytoczonych twierdzeń wynika, iż mnożniki obciążenia μ_s – statyczny i μ_k – kinematyczny spełniają relację

$$\mu_s q \leq \mu q \leq \mu_k q$$

a dokładnie

$$\sup \mu_s = \mu = \inf \mu_k .$$

Podejście kinematyczne

Podstawą jest tu zasada mocy dysypowanych

$$\int_A P_i \delta \dot{u}_i dA = \int_V \sigma_{ij} \delta \dot{\epsilon}_{ij} dV \quad - \text{moc dysypowana}$$

$$\int_A P_i \delta u_i dA = \int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV \quad - \text{zasada prac wirtualnych}$$

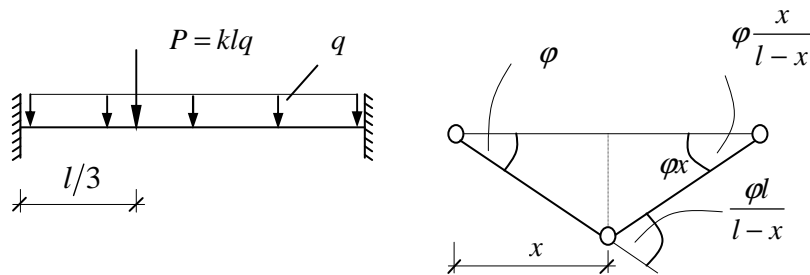
W dalszych rozważaniach zasadę mocy dysypowanych wykorzystujemy do określenia mnożnika kinematycznego μ_k

$$\int_A \mu_k P_i \delta u_i dA = L \rightarrow \mu_k = \frac{L}{\int_A P_i \delta u_i dA}$$

Biorąc pod uwagę, że μ_k stanowi górne ograniczenie nośności należy znaleźć taki mechanizm, aby L było możliwie najmniejsze zaś mianownik największy. Stwierdzenie to stanowi podstawową przesłankę wyznaczania rzeczywistego mechanizmu zniszczenia w podejściu kinematycznym.

ZADANIE 6.1.

Należy określić obciążenie graniczne q_k układu przedstawionego na rys. 6.1 korzystając z podejścia kinematycznego.



Rys. 6.1

Rozwiązanie:

Z zasady mocy dysypowanych wynika, że

$$\sum_{(m)} P_i \delta u_i = \mu \left(qx \frac{2}{3} \phi x + q(l-x) \frac{2}{3} \phi x \frac{l-x}{l-x} + klq \frac{l}{3} \phi \right) = \mu_k q l \phi \left[\frac{2}{3} x + \frac{kl}{3} \right]$$

$$\sum_{(n)} M_p \delta \phi = M_p \left[\phi + \frac{\phi l}{l-x} + \frac{\phi x}{l-x} \right] = M_p \phi \frac{2l}{l-x}$$

stąd

$$\left(\sum_{(m)} P_i \delta u_i = \sum_{(n)} M_p \delta \phi \right) \Rightarrow \mu_k q \cdot l \phi \left[\frac{2}{3} x + \frac{kl}{3} \right] = M_p \phi \frac{2l}{l-x}$$

$$\mu_k q = M_p \frac{6}{(l-x)(2x+kl)} = \frac{6M_p}{2lx - 2x^2 + kl^2 - klx}$$

Nieznane położenie przegubu x wyznaczymy z warunku minimum q , czyli

$$\frac{dq}{dx} = \frac{-6M_p(2l \cdot 4x - kl)}{(2lx - 2x^2 + kl^2 - klx)^2} = 0 \Rightarrow 2l - kl = 4x \Rightarrow x_0 = \frac{2l - kl}{4} = \frac{(2-k)l}{4}$$

Ostatecznie obciążenie graniczne $q_k = \mu_k q$ wynosi

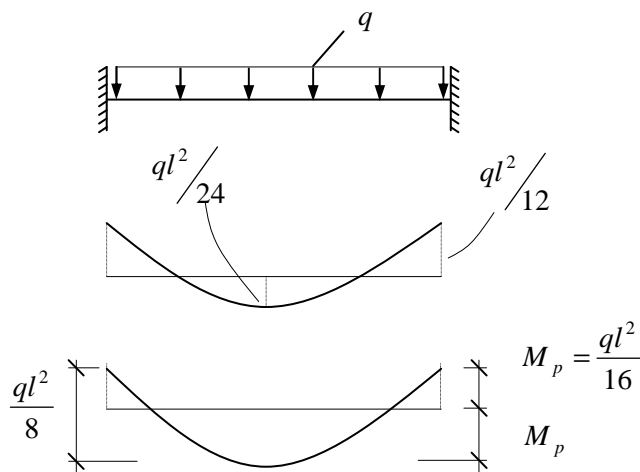
$$\begin{aligned} \mu_k q &= \frac{6M_p}{l^2 \left[\frac{2(2-k)}{4} - \frac{(2-k)^2}{16} + k - k \frac{(2-k)}{4} \right]} = \\ &= \frac{16 \cdot 6M_p}{l^2 [8(2-k) - (2-k)^2 + 16k - 4k(2-k)]} \\ \mu_k &= \frac{96M_p}{ql^2 [12 - 4k - 5k^2]} \end{aligned}$$

w szczególności, jeżeli $x_0 = \frac{l}{2}$ (przegub w połowie rozpiętości) to

$$x_0 = \frac{l}{2} = \frac{2l - kl}{4} \Rightarrow 4l = 4l - 2kl \Rightarrow k = 0, \text{ czyli siła } P \text{ wtedy musi zniknąć.}$$

ZADANIE 6.2.

Należy porównać nośność sprężystą z graniczną na schemacie belki utwierdzonej, o przekroju prostokątnym



Rys. 6.2

Rozwiązanie:

Stan nośności sprężystej obliczymy z równań

$$\frac{ql^2}{12} = M_e = W_e \sigma_0 \quad \text{stąd} \quad q = \frac{12M}{l^2} = \frac{12bh^2}{6l^2} \sigma_0 = 2 \frac{bh^2}{l^2} \sigma_0, \quad W_e = \frac{bh^2}{6}$$

Nośność graniczna w zakresie plastycznym wynosi

$$\frac{\tilde{q}l^2}{16} = M_p \Rightarrow \tilde{q} = \frac{16M_p}{l^2} \quad \text{i} \quad M_p = W_p \sigma_0 = \frac{bh^2}{4} \sigma_0$$

stąd

$$\tilde{q} = \frac{16bh^2}{4l^2} \sigma_0 = 4 \frac{bh^2}{l^2} \sigma_0$$

Z porównania nośności wynika, że

$$q/\tilde{q} = \frac{2 \frac{bh^2}{l^2} \sigma_0}{4 \frac{bh^2}{l^2} \sigma_0} = \frac{1}{2} \Rightarrow \tilde{q} = 2q$$

czyli przy projektowaniu w zakresie sprężystym belki obustronnie utwierdzonej wykorzystujemy tylko połowę możliwości przenoszenia obciążeń przez ten układ.

ZADANIE 6.3.

Należy porównać nośność sprężystą z graniczną w schemacie pokazanym na rys. 6.3

Rozwiązanie:

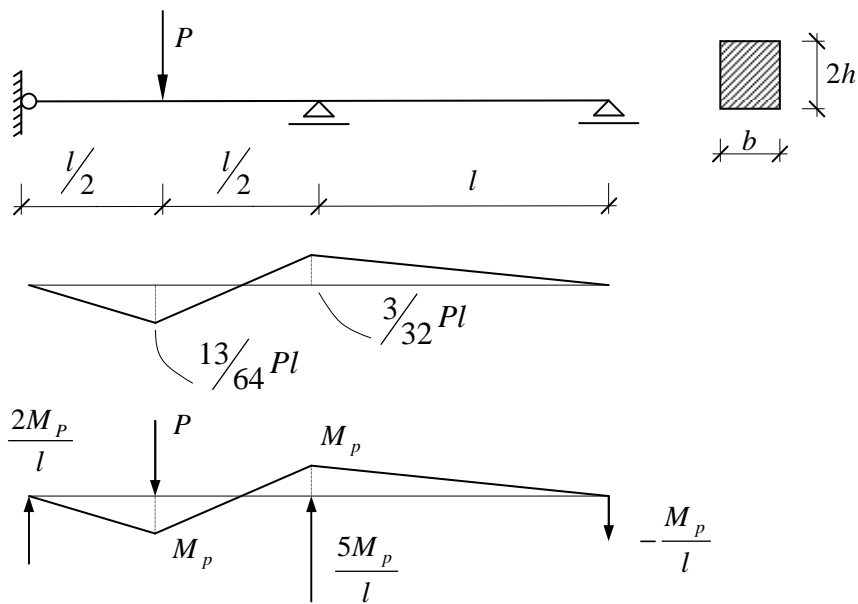
$$\text{Nośność sprężysta wynosi} \quad M_{\max} = \frac{13}{64} Pl$$

$$\frac{13}{64} Pl = \frac{b(2h)^2}{6} \sigma_0$$

stąd

$$P = \frac{64}{13} \frac{4}{6} \frac{bh^2}{l} \sigma_0 = \frac{128}{39} \frac{bh^2}{l} \sigma_0$$

Nośność graniczną wyliczymy z warunków równowagi granicznej.



Rys. 6.3

Z sumy rzutów wynika

$$\frac{2M_p}{l} + \frac{5M_p}{l} - \frac{M_p}{l} = \tilde{P}$$

stąd nośność

$$\tilde{P} = \frac{6M_p}{l} = \frac{6}{l} \left(\frac{b(2h)^2}{4} \right) \sigma_0 = \frac{6bh^2}{l} \sigma_0$$

Otrzymujemy tu wzrost nośności o wartość $\alpha = \tilde{P}/P_{spr} = 1,83$, czyli nośność graniczna jest 1,83 razy większa od nośności sprężystej.

ZADANIE 6.4.

Należy porównać nośność sprężystą i graniczną dla schematu przedstawionego na rys. 6.4.

Rozwiązanie:

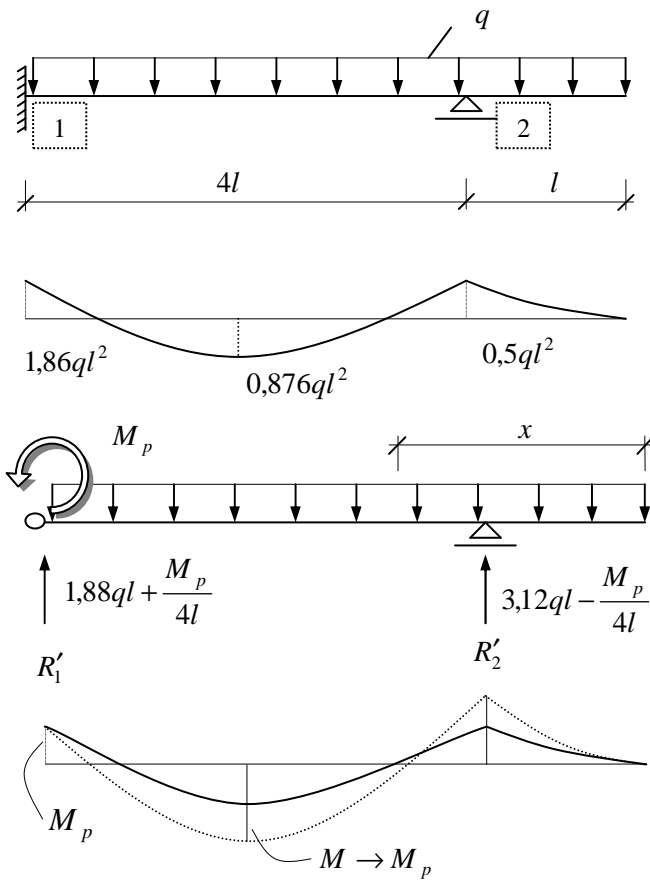
Nośność sprężysta określona przez moment utwierdzenia wynosi $q = \frac{M}{1,86l^2}$.

Stan graniczny, kiedy pierwszy przegub utworzy się w utwierdzeniu prowadzi do prostych zależności, wynikających z równań równowagi.

Funkcja momentów zginających w tym układzie przyjmie formę

$$M(x) = -\frac{qx^2}{2} + R'_2(x-l)$$

$M(x)$ osiąga ekstremum dla $x_0 = 3,12l - \frac{M_p}{4ql}$, stąd



Rys. 6.4

$$M_{(0)} = 1,88ql^2 - 0,531M_p + 0,0312 \frac{(M_p)^2}{ql^2}$$

dla $M_{(0)} = M_p$ będzie $\bar{q} = 0,850 \frac{M_p}{l^2}$

Z porównania nośności \tilde{q}/q dla różnych przekrojów wynika

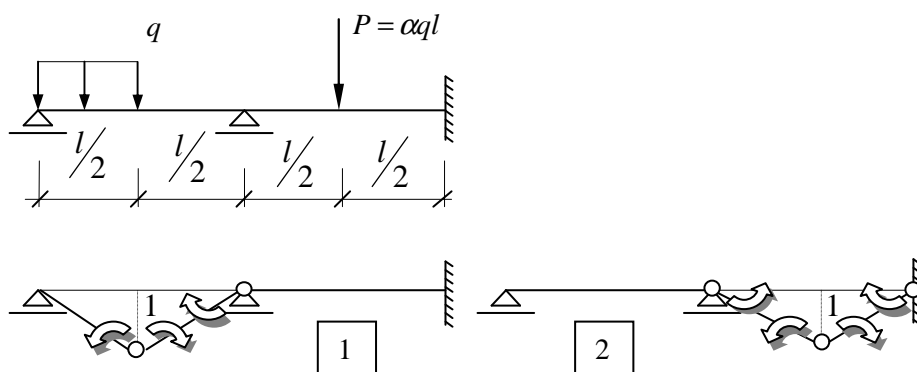
$$q_{spr.} = 0,358 \frac{bh^2}{l^2} \sigma_0 \quad \tilde{q} = 0,850 \frac{bh^2}{l^2} \sigma_0 \Rightarrow \alpha = \frac{\tilde{q}}{q_{spr.}} = 2,38$$

$$q_{spr.} = 0,421 \frac{a^3}{l^2} \sigma_0 \quad \tilde{q} = 1,13 \frac{a^3}{l^2} \sigma_0 \Rightarrow \alpha = 2,69$$

$$q_{spr.} = 0,632 \frac{a^3}{l^2} \sigma_0 \quad \tilde{q} = 0,200 \frac{a^3}{l^2} \sigma_0 \Rightarrow \alpha = 3,17$$

ZADANIE 6.5.

Należy dobrać α tak, aby nośność graniczna w obu schematach zniszczenia była jednakowa



Rys. 6.5

Rozwiązanie:

Mnożniki kinematyczne μ_1 i μ_2 wynoszą

$$\mu_1 q \frac{l}{3} = 2M_p \frac{2}{l} \Rightarrow \mu_1 = \frac{4M_p}{l} \frac{3}{ql}$$

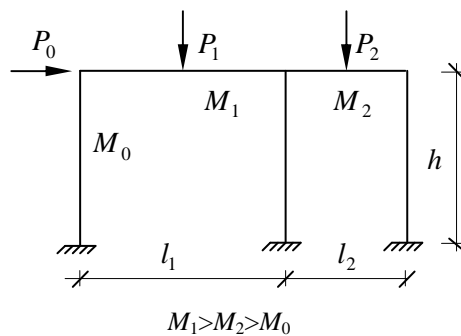
$$\mu_2 P \cdot 1 = 4M_p \frac{2}{l} \Rightarrow \mu_2 = \frac{8M_p}{Pl}$$

stąd, kiedy jednocześnie wystąpią oba mechanizmy zniszczenia $\mu_1 = \mu_2$ wynika

$$\frac{12M_p}{ql^2} = \frac{8M_p}{\alpha ql^2} \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}$$

ZADANIE 6.6.

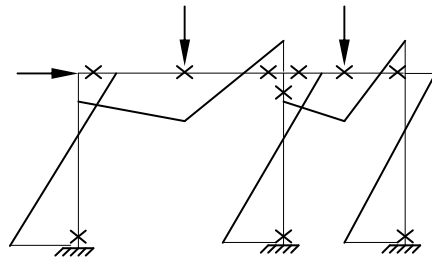
W podanym układzie ramowym (rys. 6.6a) należy określić nośność stosując metodę superpozycji mechanizmów podstawowych. Momenty uplastycznienia w ryglach wynoszą $M_1 > M_2 > M_0$.



Rys. 6.6a

Rozwiązanie:

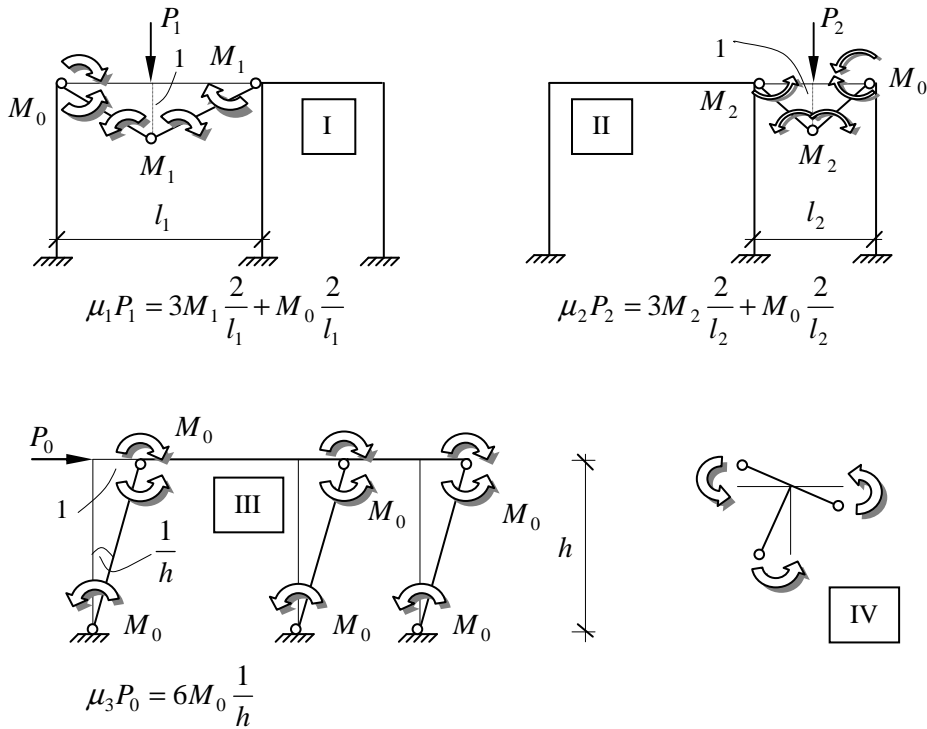
Liczba niezależnych mechanizmów podstawowych m wynosi $m = r - n$ gdzie r – liczba niebezpiecznych przekrojów, n – stopień statycznej niewyznaczalności. Szkicując wykres momentów zginających (rys. 6.6b) stwierdzamy występowanie 10 niebezpiecznych przekrojów, a zadanie jest 6-o krotne statycznie niewyznaczalne. Mamy więc 4 mechanizmy podstawowe. Stosując do każdego z tych mechanizmów równanie zasady prac wirtualnych obliczymy mnożniki kinematyczne



× - przekroje niebezpieczne

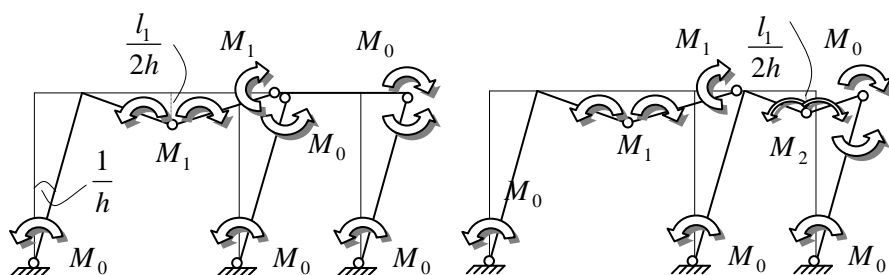
Rys. 6.6b Szkic wykresów momentów zginających

- Mechanizmy podstawowe ($m=4$)



Rys. 6.6c

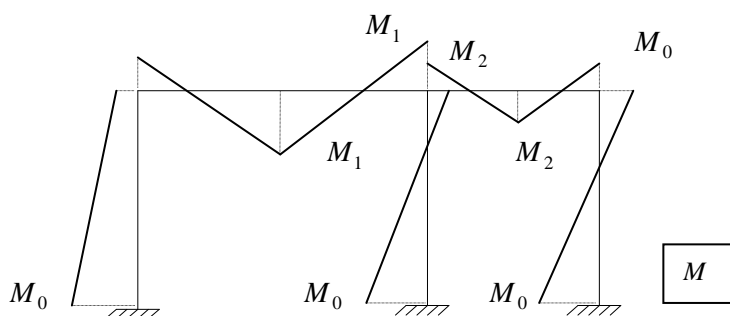
- Mechanizmy złożone otrzymamy ze złożenia mechanizmów prostych. Podobnie jak poprzednio obliczymy mnożniki kinematyczne



Rys. 6.6d

$$\mu_4 \left(P_0 \cdot 1 + P_1 \frac{l_1}{2h} \right) = 5M_0 \frac{1}{h} + 3M_1 \frac{1}{h}$$

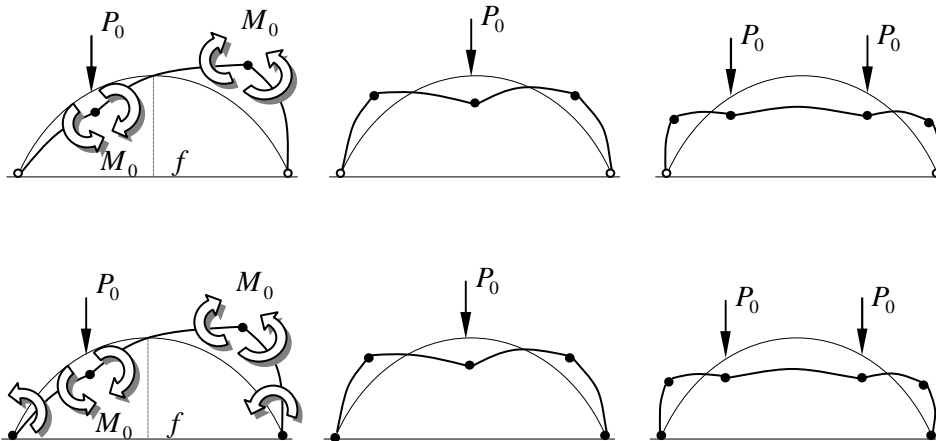
$$\mu_5 \left(P_0 + P_1 \frac{l_1}{2h} + P_2 \frac{l_2}{2h} \right) = 5M_0 \frac{1}{h} + 4M_1 \frac{1}{h} + 2M_2 \frac{1}{h}$$



Rys. 6.6e Wykresy momentów granicznych

Stany graniczne łuków

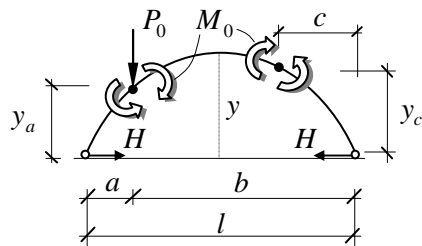
W przypadku łuków najczęściej korzystamy z podejścia statycznego układając warunki równowagi granicznej łuku z uzewnętrznionymi momentami plastycznymi w przegubach. Omówimy stany graniczne łuków z n przegubami w podporach i bezprzegubowych. Mają one postać



Rys. 6.0b Mechanizmy zniszczenia łuków

ZADANIE 6.7.

Należy wyznaczyć nośność łuku przedstawionego na rys. 6.7a.



Rys. 6.7a

Rozwiązanie:

Wykreślmy rozkład momentów granicznych przyjmując, iż jest on sumą momentów od siły rozporu H ($M_H = H \cdot y$) oraz momentu od obciążenia granicznego M_p .

Równania równowagi granicznej

$$\frac{P_0 ab}{l} - Hy_a = M_0 - \frac{P_0 a}{l} c + Hy_c = M_0$$

prowadzą do następującego rozwiązania

$$H = \frac{2(c+b)}{-y_a c + y_c b} M_0, \quad P_0 = \frac{l(y_a + y_c)}{a(by_c - cy_a)} M_0$$

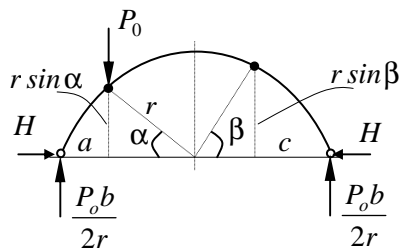
Podstawiając współrzędne przegubów plastycznych (a, y_a) , (c, y_c) otrzymamy wzory na nośność P_0 i siłę rozporu H .

W przypadku szczególnym łuku kołowego równania równowagi granicznej jako warunki momentów liczonych względem przegubów plastycznych mają postać

$$P_0 \frac{ba}{2r} - Hr \sin \alpha = M_0, \quad -P_0 \frac{ac}{2r} + Hr \sin \beta = M_0$$

stąd

$$H = \frac{c+b}{r(c \sin \alpha + b \sin \beta)} M_0, \quad P_0 = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{b \sin \beta - c \sin \alpha} \frac{2r}{a} M_0$$



$$a = r(1 - \cos \alpha)$$

$$b = r(1 + \cos \alpha)$$

$$c = r(1 - \cos \beta)$$

Rys. 6.7b

Wartości H i P_0 parametrycznie zależą od położenia drugiego przegubu plastycznego wyznaczonego przez kąt β .

Rzeczywiste położenie tego przegubu określa wymóg $\frac{dP_0}{d\beta} = 0$,

$$k(\beta) = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

$$\frac{dP_0}{d\beta} = \frac{d}{d\beta} \left(\frac{1+k(\beta)}{bk(\beta)-c} \frac{2r}{a} M_0 \right) \rightarrow$$

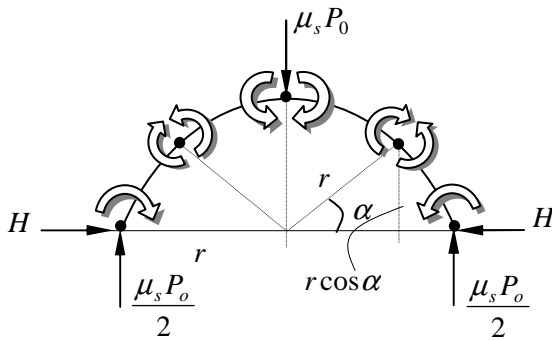
$$\frac{2rM_{pl} \cos \beta [b \sin \beta - r(1 - \cos \beta) \sin \alpha] - (\sin \beta + \sin \alpha) [b \cos \beta - r \sin \alpha \sin \beta]}{a [b \sin \beta - r(1 - \cos \beta) \sin \alpha]^2} = 0$$

Kąt β wyliczymy z przyrównania licznika pochodnej do zera. Otrzymamy stąd równanie

$$\frac{r+b}{r} \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = 1$$

ZADANIE 6.8.

Należy określić nośność łuku bezprzegubowego, kołowego, obciążonego siłą skupioną $\mu_s P_0$ w kluczu. Schemat łuku z obciążeniem przedstawiono na rys. 6.8.



Rys. 6.8

Rozwiązanie:

Wypisując warunki sumy momentów z prawej strony przegubów plastycznych otrzymamy układ równań

$$\frac{\mu_s P_0}{2} r(1 - \cos \alpha) - Hr \sin \alpha + 2M_p = 0$$

$$\frac{\mu_s P_0}{2} r - Hr = 0$$

stąd

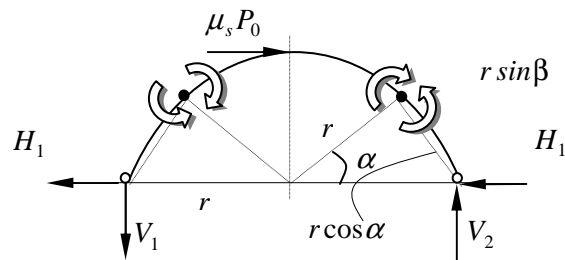
$$H = \frac{\mu_s P_0}{2}, \quad \mu_s P = \frac{4M_p}{r(\sin \alpha - 1 + \cos \alpha)}$$

Obciążenie graniczne jak i poprzednio zależy od kąta α , stąd warunek $\frac{dP}{d\alpha} = 0$ określa rzeczywiste położenie bocznych przegubów plastycznych.

$$\frac{d\mu_s P_0}{d\alpha} = 0 \Rightarrow -\frac{4M_p}{r} \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{(\sin \alpha + \cos \alpha - 1)^2} = 0 \Rightarrow \cos \alpha = \sin \alpha \quad \alpha = \frac{\pi}{4}$$

ZADANIE 6.9.

Wyznamy jeszcze obciążenie graniczne łuku kołowego, dwuprzegubowego obciążonego w kluczu siłą poziomą $\mu_s P_0$.



Rys. 6.9

Rozwiązanie:

W układzie powstaną dwa przeguby określone przez kąt α , które zamieniają łuk w mechanizm o jednym stopniu swobody.

Równanie równowagi granicznej w tym przypadku sprowadza się do równań sumy momentów wszystkich sił po jednej stronie przegubu plastycznego plus pozostałe trzy typowe równania równowagi

$$V_2 r(1 - \cos \alpha) - H_2 r \sin \alpha + M_p = 0$$

$$V_2 (r + r \cos \alpha) - H_2 r \sin \alpha - \mu_s P_0 r(1 - \sin \alpha) - M_p = 0$$

$$(V_1 + V_2)r - (H_1 + H_2)r = 0$$

$$H_1 + H_2 = \mu_s P_0, \quad V_1 - V_2 = 0$$

Z rozwiązania układu równań równowagi granicznej uzyskamy

$$V_1 = V_2 = V = \frac{\mu_s P_0}{2}, \quad H_2 = \left[\frac{M_p}{r} + V(1 - \cos \alpha) \right] \frac{1}{\sin \alpha}$$

Z drugiego układu równań otrzymamy

$$\frac{\mu_s P_0}{2} r(1 + \cos \alpha) - \mu_s P_0 r(1 - \sin \alpha) = M_p + \left[\frac{M_p}{r} + \frac{\mu_s P_0}{2}(1 - \cos \alpha) \right] r$$

stąd

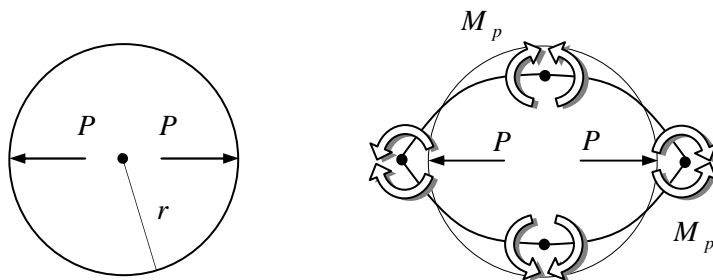
$$\frac{\mu_s P_0 r}{2} (1 + \cos \alpha - 2 + 2 \sin \alpha - 1 + \cos \alpha) = 2M_p \rightarrow \mu_s P_0 = \frac{2M_p}{r(\cos \alpha - 1 + \sin \alpha)}$$

Podobnie jak poprzednio położenie przegubów plastycznych (α) wyznaczmy z warunku $\frac{dP_0}{d\alpha} = 0$

$$\frac{dP_0}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{2M_0}{r} \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{(\cos \alpha + \sin \alpha - 1)^2} = 0 \Rightarrow \sin \alpha = \cos \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

ZADANIE 6.10.

Należy określić nośność pierścienia rozciąganego siłami P .



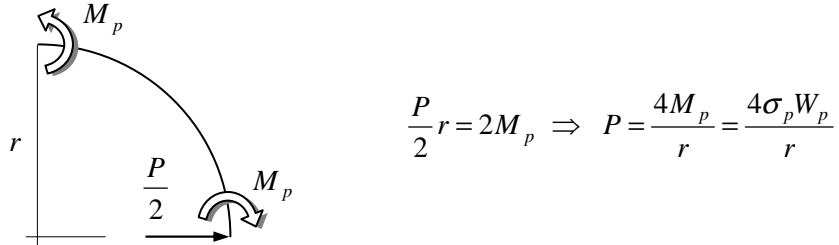
Rys. 6.10a

Dane: W_p, σ_p, r

Rozwiązanie:

Z uwagi na symetrię zadania pierścień można podzielić na 4 części. Każda z tych części ograniczona jest przegubami plastycznymi. Następnie analizować będziemy warunki równowagi granicznej dla ćwiartki pierścienia

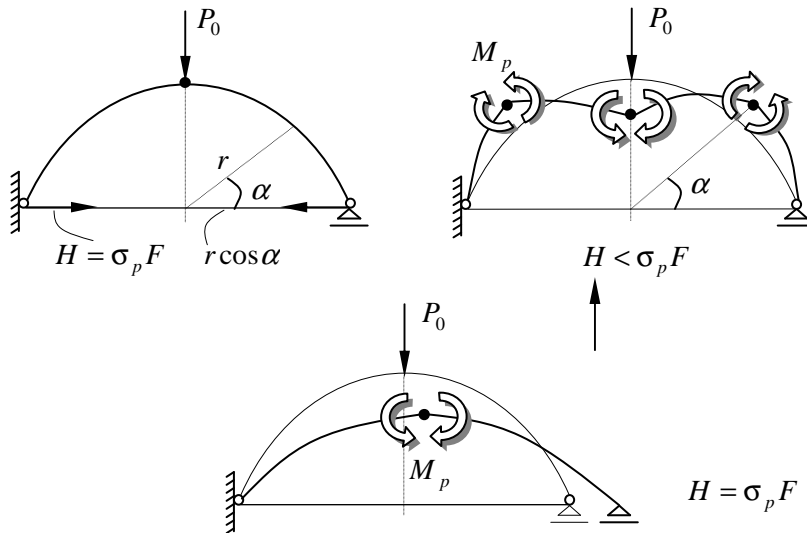
Z równowagi ćwiartki okręgu wynika, że



Rys. 6.10b

ZADANIE 6.11.

Łuk kołowy przedstawiony na rys. 6.11a został wzmocniony poziomym ściągiem. Znane są wymiary geometryczne ściągu oraz moment uplastycznienia. Należy określić wymiary ściągu i warunki, iż jego zniszczenie wystąpi jednocześnie z uplastycznieniem łuku.



Rys. 6.11a