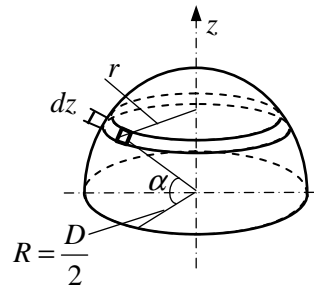


Rys. 7.6c



Rys. 7.6d

Mając na uwadze rys. 7.6d napiszemy wyrażenie na wypadkową Q

$$Q = \int_0^R P \sin \alpha 2\pi dz \text{ wiedząc, że } r = R \cos \alpha, \quad z = R \sin \alpha, \quad dz = R \cos \alpha d\alpha$$

napiszemy

$$Q = \int_0^{\pi/2} P \sin \alpha 2\pi R^2 \cos \alpha d\alpha = P\pi R^2 \left[\sin^2 \alpha \right]_0^{\pi/2} = P\pi R^2$$

a podstawiając za $R = \frac{D}{2}$ otrzymamy ostatecznie

$$Q = \frac{1}{4} P\pi D^2$$

Natomiast zbierając naprężenia σ po obwodzie równika wyznaczmy siłę, która równoważyć będzie powyższą siłę wypadkową

$$Q = \sigma 2\pi \frac{D}{2} \cdot t = \sigma \pi D t$$

Porównując dwa ostatnie wyrażenia wyznaczmy zależność na naprężenie σ istniejące w ściance kuli w wyniku działania ciśnienia P

$$\sigma = \frac{PD}{4t}$$

Podstawiając do hipotezy H–M–H uzyskamy

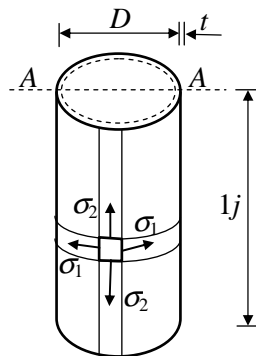
$$\sigma_{zred} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma - \sigma)^2 + (\sigma - 0)^2 + (\sigma - 0)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2\sigma^2} = \sigma \leq \sigma_0$$

stąd maksymalne ciśnienie jakie może wystąpić w zbiorniku kulistym o grubości ścianek t przyjmie postać

$$P_{dop}^{HMH} = \frac{4\sigma_0 t}{D}$$

ZADANIE 7.7.

Cienkościenny zbiornik walcowy o średnicy D , jednostkowej wysokości i grubości ścianek t poddany jest ciśnieniu wewnętrznemu P . Należy wyznaczyć dopuszczalne ciśnienie wynikające z hipotezy H–M–H



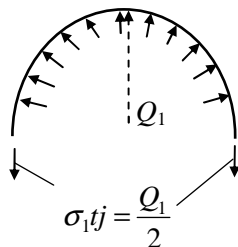
Rys. 7.7a

Dane: $D, t, R, \sigma_0, P_{dop}^{HMH} = ?$

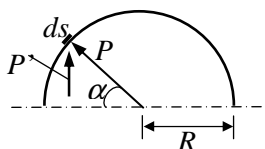
Rozwiązanie:

Dla wyznaczenia dopuszczalnego ciśnienia działającego w walcowym zbiorniku dokonamy jego przecięcia prostopadle do tworzącej walca w celu wyznaczenia naprężenia σ_2 , oraz równoległe do tworzącej walca w średnicy podstawy walca tak aby wyznaczyć ciśnienie σ_1 . Rozkłady ciśnień w walcu pokazuje rys. 7.7a.

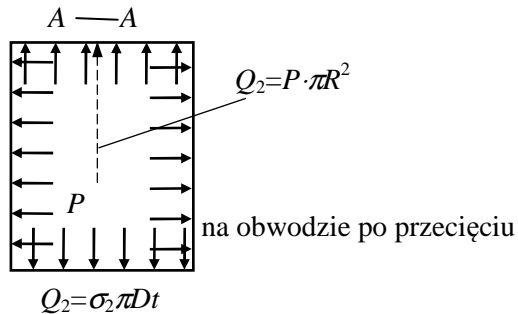
Sposób wyznaczenia ciśnienia σ_1 jest pokazany na rys. 7.7b i rys. 7.7c.



Rys. 7.7b



Rys. 7.7c



Rys. 7.7.d

Dla wyznaczenia naprężenia σ_1 zbieramy z połowy pobocznic walca ciśnienie P do wypadkowej Q (rys. 7.7b)

$$Q_1 = 2\sigma_1 t \cdot 1j$$

Do wyznaczenia siły wypadkowej Q_1 pomoże nam rys. 7.7c, wtedy

$$Q_1 = \int_s P \sin \alpha 1j ds = 2 \int_0^{\pi/2} P \sin \alpha 1j R d\alpha$$

$$Q_1 = 2[-P \cos \alpha 1j R]_0^{\pi/2} = PDj$$

Porównując ze sobą dwa powyższe wyrażenia na Q_1 wyznaczmy zależność na σ_1 , czyli

$$2\sigma_1 t j = PD j$$

$$\sigma_1 = \frac{PD}{2t}$$

W wyniku, iż ciśnienie działa we wszystkich kierunkach jednakowo mamy też oddziaływanie na górną i dolną kołową część walca (rys. 7.7d). Tak wyznaczmy drugie naprężenie σ_2 działające wzdłuż wysokości walca. Wypadkowa działania ciśnienia P na górną część walca przyjmie postać $Q_2 = P \cdot \pi \frac{D^2}{4}$. Następnie zbierając naprężenia σ_2 z obwodu walca otrzymamy

$$Q_2 = \sigma_2 \pi D t$$

Porównując uzyskane wyrażenie na Q_2 uzyskamy

$$P \cdot \pi \frac{D^2}{4} = \sigma_2 \pi D t$$

$$\sigma_2 = \frac{PD}{4t}$$

Wstawiając do hipotezy H–M–H naprężenia σ_1 i σ_2 otrzymamy warunek

$$\sigma_{zred} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

a dalej

$$\sigma_{zred} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{PD}{2t} - \frac{PD}{4t}\right)^2 + \left(\frac{PD}{2t}\right)^2 + \left(\frac{PD}{4t}\right)^2} =$$

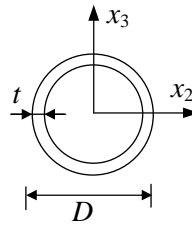
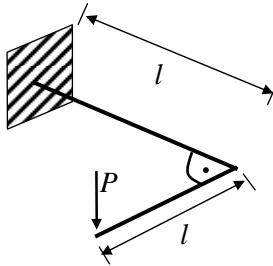
$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{PD}{2t}\right)^2 - 2\frac{PD}{2t}\frac{PD}{4t} + \left(\frac{PD}{4t}\right)^2 + \left(\frac{PD}{2t}\right)^2 + \left(\frac{PD}{4t}\right)^2} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{PD}{2t}\right)^2 \left(1 - 1 + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{PD}{2t} \sqrt{2} = \frac{PD}{2t} \leq \sigma_0
\end{aligned}$$

Stąd maksymalne ciśnienie jakie może występować w walcu wynosi

$$P_{dop}^{HMH} = \frac{2\sigma_0 t}{D}$$

ZADANIE 7.8.

Wyznaczyć miejsce i wartości maksymalnych naprężeń zredukowanych wg hipotezy H–M–H w pręcie o schemacie i przekroju rurowym jak na rys. 7.8a

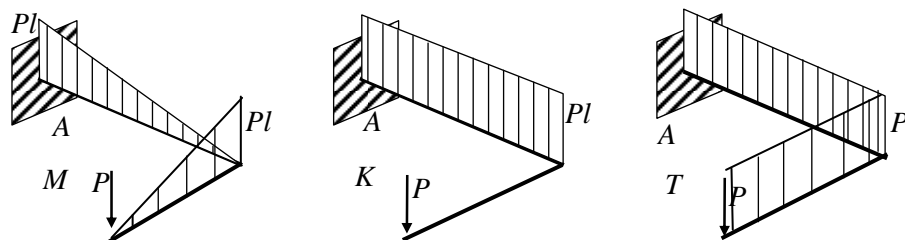


przekrój pręta (rura cienkościenna)

Rys. 7.8a

Rozwiązanie:

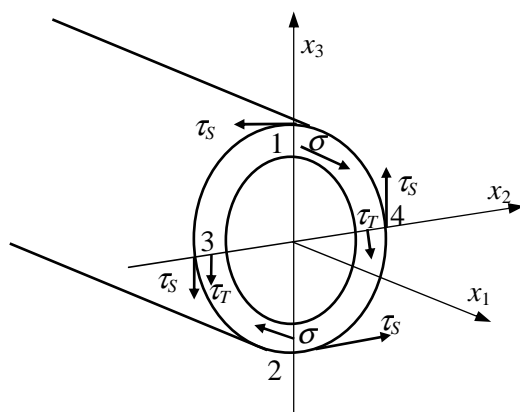
W pierwszej kolejności wyznaczamy wykresy sił wewnętrznych w pręcie, a następnie wynikające z nich rozkłady naprężeń w najbardziej niewralgicznym przekroju poprzecznym. Wykresy sił wewnętrznych mają postać



Rys. 7.8b

W przekroju przypodporowym A wystąpią największe wartości sił wewnętrznych.

Rozkład naprężeń w przekroju A przedstawia rys. 7.8c



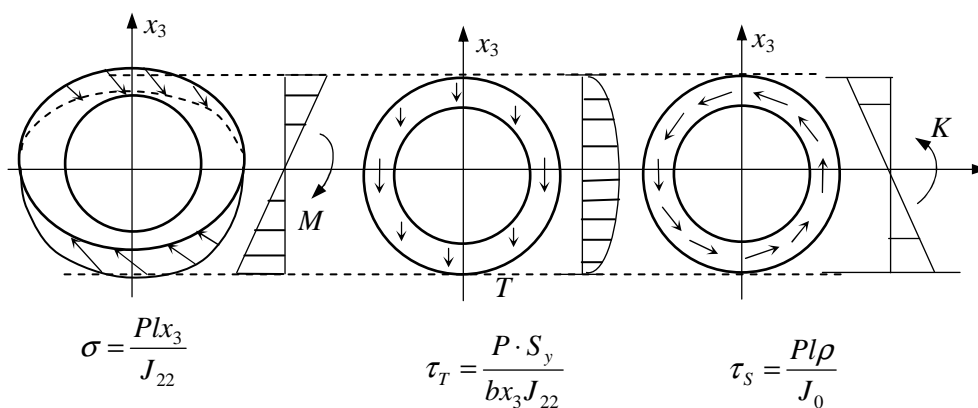
Rys. 7.8c

co oznacza, iż naprężenie zredukowane obliczymy z hipotezy H-M-H w formie

$$\sigma_{zred} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

gdzie: σ - naprężenie normalne, τ - naprężenie ścinające

Składowe stany naprężeń tj. naprężenia w przekroju A pochodzące od momentu zginającego $M=Pl$, skręcającego $K=Pl$ i siły tnącej $T=P$ mają postać



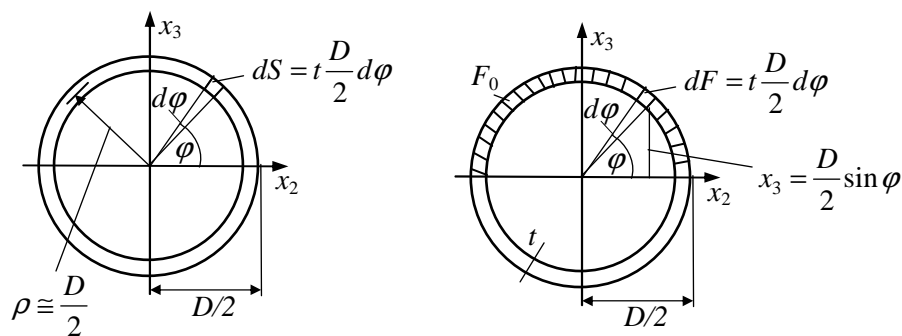
Rys. 7.8d

Poddając analizie naprężenia w przekroju A, stwierdzamy, że najbardziej wyężone są punkty 1 i 2 z uwagi na zginanie i skręcanie, a punkt 3 z uwagi na ścinanie i skręcanie.

W celu wyznaczenia naprężeń w tych punktach należy najpierw wyznaczyć charakterystyki geometryczne występujące we wzorach. Momenty bezwładności J_2 i J_0 wyliczymy z zależności

$$J_0 = \int_S \rho^2 dS = \frac{D^3 t}{2} \int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{\pi D^3 t}{4}$$

$$J_y = \frac{J_0}{2} = \frac{\pi D^3 t}{8}$$



Rys. 7.8e

Naprężenia tnące przyjmują wartość maksymalną w środku wysokości przekroju, stąd moment statyczny S_2^* obliczymy dla połowy rury

$$S_2^* = \int_{F_0} x_3 dF = \frac{D^2 t}{4} \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = \frac{D^2 t}{2}$$

Ostatecznie naprężenia w punktach 1 i 2 wynoszą

$$\sigma = \frac{Pl \frac{D}{2}}{\pi D^3 t} = \frac{4PlD}{\pi D^3 t} = \frac{4Pl}{\pi D^2 t} \quad \left[\frac{kNm}{m^2 m} = \frac{hN}{m^2} \right]$$

$$\tau_s = \frac{Pl \frac{D}{2}}{\pi D^3 t} = \frac{2PlD}{\pi D^3 t} = \frac{2Pl}{\pi D^2 t} \quad \left[\frac{kNm}{m^2 m} = \frac{kN}{m^2} \right]$$

$$\tau_T = 0$$

a w punkcie 3

$$\sigma = 0$$

$$\tau_s = \frac{Pl \frac{D}{2}}{\pi D^3 t} = \frac{2PlD}{\pi D^3 t} = \frac{2Pl}{\pi D^2 t} \quad \left[\frac{kNm}{m^2 m} = \frac{kN}{m^2} \right]$$

$$\tau_T = \frac{P \frac{D^2 t}{2}}{2t \frac{\pi D^3 t}{8}} = \frac{2P}{\pi D t} \quad \left[\frac{kN}{m \cdot m} = \frac{kN}{m^2} \right]$$

Na podstawie powyższych obliczeń możemy wyznaczyć naprężenia zredukowane dla rozważanych punktów przekroju według hipotezy H-M-H
Dla punktów 1 i 2 wynosi ono

$$\sigma_{zred} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau_s^2} = \sqrt{\left(\frac{4Pl}{\pi D^2 t}\right)^2 + 3\left(\frac{2Pl}{\pi D^2 t}\right)^2} = \frac{Pl}{\pi D^2 t} \sqrt{16+12} \cong 5,3 \frac{Pl}{\pi D^2 t}$$

a dla punktu 3

$$\sigma_{zred} = \sqrt{\sigma(\tau_s + \tau_T)^2} = \sqrt{3\left(\frac{2Pl}{\pi D^2 t} + \frac{2P}{\pi D t}\right)^2} = \sqrt{3} \frac{2P}{\pi D t} \left(\frac{l}{D} + 1\right)$$